2020

Produto Educacional desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

RESOLIÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO: Uma proposta para o ensino de Logaritmos e Função Logarítmica.

Júlio César Santos Pereira
Nilton Cezar Ferreira

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

Júlio César Santos Pereira
Nilton Cezar Ferreira

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO: Uma proposta para o ensino de Logaritmos e Função Logarítmica.

Produto Educacional vinculado à dissertação:

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Jataí/GO
2020

Autorizo, para fins de estudo e de pesquisa, a reprodução e a divulgação total ou parcial desta dissertação, em meio convencional ou eletrônico, desde que a fonte seja citada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Pereira, Júlio César Santos.
Resolução de problemas no contexto didático-pedagógico: uma proposta para o ensino de logaritmos e função logarítmica: *Produto Técnico/Tecnológico vinculado à dissertação* "Resolução de problemas como uma estratégia para o ensino-aprendizagem de logaritmos e função logarítmica" / Júlio César Santos Pereira; Nílton Cezar Ferreira. - - 2020.
29 f.; il.

Produto Técnico/Tecnológico (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2020.

1. Resolução de Problemas – ensino. 2. logaritmos e função logarítmica – proposta de ensino. 4. Produto Técnico/Tecnológico – Sequência Didática. I. Ferreira, Nílton Cezar. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Wilma Joaquim Silva - CRB1/1850 – IFG - Câmpus Jataí. Cod. F006/2020/2.

Sumário

1 Apresentação

Caros professores e professoras, este Produto Educacional foi desenvolvido durante o curso de Mestrado Profissional em Educação pra Ciências e Matemática do IFG – Campus de Jataí – GO e faz parte da dissertação: “Resolução de Problemas como uma Estratégia para o Ensino-Aprendizagem de Logaritmo e Função Logarítmica”. Nele é apresentado uma Sequência Didática, elaborada a partir de atividades feitas em sala de aula, visando contribuir com o processo de ensino-aprendizagem dos alunos e a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica, e auxiliar professores e professoras que trabalham com turmas do ensino médio, pré-vestibular e até mesmo nível superior.

No decorrer desse Produto Educacional serão apresentados os três motivos de acordo com Schroeder e Lester (1989), para se trabalhar resolução de problema em sala de aula. Esses motivos são: (1) desenvolver, no estudante, a capacidade de se criar estratégias para resolver problemas de matemática; (2) levar o estudante a construir conhecimentos de matemática a partir de problemas; e, (3) fixar conhecimento de conteúdos, e desenvolver habilidades nos estudantes para aplicar a matemática que eles aprenderam, tanto para resolver problemas práticos como problemas teóricos.

Para construção deste Produto Educacional (Sequência Didática), elaboramos um Projeto de Ensino e aplicamos em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Projeto este que foi dividido em três etapas, totalizando 15 encontros presenciais. Esta Sequência Didática foi construída a partir do Projeto de Ensino mencionado, levando em consideração os melhores resultados obtidos durante a aplicação desse projeto, após uma análise minuciosa do que ocorreu em sala de aula.

Este Produto Educacional inicia-se com uma apresentação teórica da Resolução de Problemas e um breve histórico de logaritmos, buscando inteirar o leitor do contexto histórico e subsidiá-lo no entendimento deste trabalho. Após a apresentação dessa parte teórica, é feita uma proposta de ensino em que se estabelece: 1) Um ensino “sobre” Resolução de Problemas, no qual pretende-se desenvolver, no aluno, a capacidade dele criar estratégias para resolver problemas matemáticos; 2) Auxiliar os alunos no processo de produção de conhecimentos de novos conceitos, utilizando um ensino “através” da Resolução de Problemas, para construir conhecimentos de conceitos relacionados a Logaritmos e à Função Logarítmica; 3) Um ensino “para” Resolução de Problemas, buscando fixar os conceitos introduzidos e aplicar os conhecimentos construídos para resolver problemas. Neste último, (3), é trabalhado tanto na primeira como na segunda etapa, pois, nesta última etapa utiliza-se de diversos problemas e isso pode servir para o desenvolvimento de habilidades, por meio da aplicação de conhecimentos para resolver problemas, e para a fixação de novos conhecimentos concebidos.

Ao termino de cada atividade proposta aqui, é apresentado um comentário evidenciando como se deu a aplicação dessa proposta em sala de aula, para que o professor(a) possa comparar essa aplicação com sua. E, no final deste trabalho, são apresentadas algumas considerações para reflexões sobre proposições de novos trabalhos, nessa linha, voltados para o ensino-aprendizagem em sala de aula.

2 Resolução de Problemas e suas Abordagens

De acordo com Onuchic (1999, p. 203), a "importância dada à Resolução de Problemas, no contexto da sala de aula de matemática, é recente e somente nas últimas décadas é que educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção". A partir daí, muitas discussões e pesquisas sobre o tema Resolução de Problemas ocorreram, principalmente, nos Estados Unidos. Atualmente, a preocupação com resolução de problemas vem ocupando cada vez mais um lugar importante nos currículos escolares, graças aos esforços de muitos matemáticos, educadores matemáticos, pesquisadores e grupos de pesquisa consolidados.

No final da década de 1980, Schroeder e Lester (1989), em seu artigo *Developing Under Standing in Mathematics via Problem Solving* (Desenvolvendo o entendimento em matemática via Resolução de Problemas, em tradução), afirmaram que existem três formas de utilizar a Resolução de Problemas em sala de aula: a primeira diz respeito ao ensino sobre Resolução de Problemas; a segunda versa acerca do ensino através da Resolução de Problemas e na terceira é tratado ensino para Resolução de Problemas.

- O ensino "sobre" Resolução de Problemas

Esta abordagem de ensino baseia-se no modelo de Polya (1995), no qual são estabelecidas estratégias e observadas as heurísticas de resolução de problemas, cujo foco é desenvolver habilidades nos estudantes para resolverem problemas. Para isso, Polya apresentou em seu livro *How to solve it*, traduzido para português como "A Arte de Resolver Problemas", quatro passos, considerados por ele, primordiais para se chegar à solução de um problema. Primeiramente é preciso compreender o problema; em seguida, ver como os diversos itens estão inter-relacionados, principalmente a relação da incógnita com os dados, e, a partir disso, produzir uma ideia da resolução do problema e estabelecer um plano. Na sequência, é importante executar o plano e, por último, fazer um retrospecto da resolução, revendo-a e discutindo-a.

Agindo dessa forma, o professor poderá levar os estudantes a compreenderem suas heurísticas, envolvidas no trabalho em questão, ou seja, suas operações mentais que possam-lhes ser úteis para resolver o problema e consequentemente desenvolver suas habilidades, produzindo, estratégias de resolução do problema.

- O ensino “através” da Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao se ensinar por intermédio da resolução de problemas, eles passam a ser valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio para construção de conhecimento, por meio da introdução de conceitos, de conteúdos ou de procedimentos, de forma a levar o estudante a conceber, e não apenas conhecer, as teorias apresentadas a ele.

Com base nesta abordagem, a Resolução de Problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino e tornou-se base da maioria das pesquisas do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP)[1].

Onuchic e Allevato (2011, p. 83) propõem uma metodologia de ensino que denominaram Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesta metodologia é sugerindo um roteiro para auxiliar o professor no desenvolvimento de um ensino “através” da Resolução de Problemas. Vale ressalta que as autoras deixam claro que esse roteiro são apenas orientações e não um modelo a ser seguido. Neste roteiro, é proposto:

1º) Proposição do problema: esse problema inicial é chamado de “problema gerador”, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não trabalhado em sala de aula.

2º) Leitura individual: quando distribuído o problema impresso, cada aluno faz sua leitura, espera-se que o aluno, ao fazer a leitura individual, reflita, coloque-se em contato com a linguagem matemática e desenvolva a sua própria compreensão do problema proposto.

3º) Leitura em conjunto: reúnem-se os alunos em pequenos grupos e fazem uma nova leitura coletiva e discussão do problema; o professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, porém são os alunos que desenvolvem as ações pertinentes à resolução dos problemas.

4º) Resolução do problema: nessa etapa, os alunos em seus respectivos grupos, tentam resolver o problema gerador, conduzindo-o a construção de conhecimentos sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. As ações dos alunos voltam-se à expressão escrita, pois precisarão da linguagem matemática ou de recursos de que dispõem como, por exemplo, linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.

---

[1] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP). Esse grupo é coordenado pela Professora Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, e desenvolve suas atividades no Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP – Rio Claro/SP.

5º) Observar e incentivar: nessa etapa, o professor age, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas e motivando-os na troca de ideias, auxiliando nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos estudantes.

6º) Registro das resoluções na lousa: após a resolução do problema gerador, são solicitados que representantes dos grupos façam o registro de suas resoluções na lousa.

7º) Plenária: diante das soluções colocadas na lousa pelos representantes de cada grupo, o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação da resolução.

8º) Busca do consenso: a partir das resoluções colocadas na lousa, feita a plenária, o professor e os alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto e os incorretos. Esse é o momento crucial para o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática, visto sua relevância na construção de conhecimentos acerca do conteúdo abordado.

9º) Formalização do conteúdo: O professor registra na lousa uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem matemática padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações se for o caso.

10º) Proposição e resolução de novos problemas: esses problemas geradores possibilitam analisar e compreender elementos essenciais do conteúdo matemático introduzidos a consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas e assim por diante.

Contudo Allevato e Onuchic (2014, p. 46) salientam que “essa etapa teria forte viés do ensino para a resolução de problemas, contudo, isso não desconfigura a metodologia porque essa concepção (através) inclui as demais (sobre e para): [...]”.

- O ensino “para” Resolução de Problemas

Ferreira; Pereira e Lemos (2018, p. 4) salientam que: “Ao ensinar nessa abordagem, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e suas propriedades, os principais teoremas, às vezes são enunciados de maneira simplificada e sem demonstração”. E, eles complementam que depois que os conteúdos são dados, vários exemplos são postos tentado abranger a maior quantidade de situações possíveis para que o aluno seja capaz de resolver qualquer problema do mesmo assunto. Nesta abordagem o professor não está preocupado em desenvolver as habilidades matemáticas do aluno, ele espera apenas que o aluno seja capaz de reproduzir o que já foi feito e adaptar seus conhecimentos para o maior número possível de situações. E, ao fazer a avaliação do conteúdo ensinado, o professor cobra a reprodução, repetindo exercícios praticados em sala de aula e, muitas vezes, nem mesmo altera os dados.

Van de Walle (2001) apud Allevato e Onuchic (2014, p. 47) defende que: “A Resolução de Problemas deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática”. Observa-se, assim, que o desenvolvimento cognitivo dos alunos continua durante a resolução de problemas, nesse sentido, a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois, nessa metodologia, o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo. Ademais, os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo diminuído o carácter sancionador das avaliações somativas.

3 Logaritmos: Origens e concepções

Os babilônios, segundo Boyer (2012), viveram no vale mesopotâmico no quarto milênio antes de Cristo. Era uma população de alto nível cultural que utilizava o sistema de base sexagesimal, unidade de tempo e fazia medida dos ângulos. Seu maior trunfo foi à utilização de uma notação que cobria tanto os números inteiros quanto os racionais. Entre as tabelas babilônicas se encontram algumas tabelas contendo potências sucessivas de numerais semelhantes à tabela de logaritmos, ou mais propriamente de antilogaritmos, equivalente a construída por Jhon Napier (1550 - 1617).

Pecorari (2013) salienta que as origens do descobrimento dos logaritmos remontam aos estudos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) referentes às sucessões aritméticas e geométricas sobre a sucessão de potências de um número dado, as mesmas mencionadas nas tábuas babilônicas. Vários séculos depois, na transição do Renascimento para a Modernidade até o início do século XVI, a comparação entre potências de sucessões voltou aparecer no trabalho do matemático alemão Miguel Stifel (1487-1567).

No final do século XVI, com o avanço nos estudos da Astronomia e da Navegação, cada vez mais se faziam necessários os usos dos cálculos aritméticos muito complexos, e, a invenção e o uso das frações decimais, em substituição às sexagesimais viessem facilitar os cálculos de multiplicações, divisões, potências e extração de raízes, que eram consideradas tarefas extremamente complexas.

John Napier (1550 - 1617), conforme Eves (2008), não era matemático profissional, apesar disso tinha um grande interesse em cálculos numéricos e trigonometria. Essa preocupação fica evidente em um trecho de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) de 1614, a qual continha uma tábua que fornece logaritmos dos senos de ângulos em minutos sucessivos de arcos.

De acordo com Eves (2008), as produções de Napier geraram quatro produtos, trabalho que entrou para a história da matemática, conforme se vê nas seguintes palavras:

> (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido

> como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números (EVES, 2008, p. 342).

Os logaritmos oferecem uma maneira rápida de efetuar grandes divisões e multiplicações, baseando-se no princípio de que, para multiplicar potências, podem-se somar seus expoentes. E, ainda, o desenvolvimento dos logaritmos tornou possível muitas outras atividades, como a astronomia, a engenharia dentre outras.

São várias as situações-problemas que, a partir de uma função exponencial, podem gerar a necessidade de um logaritmo. Contudo, outras situações já partem diretamente do Logaritmo como é o caso da Escala Richter, a medição do PH, a intensidade auditiva ou nível sonoro entre muitos outros.

4 Como ensinar Logaritmos e Função Logarítmica utilizando as abordagens da Resolução de Problemas

Esta sequência didática foi planejada para ser trabalhada em 12 aulas de cinquenta minutos cada, com alunos do Ensino Médio, Pré-Vestibular e até mesmo Nível Superior, cujo o objetivo é, primeiramente desenvolver no estudante a capacidade de criar estratégias para resolver problemas de matemática. A partir daí, levar o estudante a construir conhecimentos de matemática através de problemas; e ainda, utilizar problemas para ampliar seu conhecimento e, também, fazer com que ele consiga aplicar, tanto em problemas reais quanto problemas teóricos, a matemática que ele aprendeu.

Propomos que este trabalho seja realizado em três etapas:

- Familiarizar o estudante com a Resolução de Problema. Isso pode ser feito utilizando problemas para desenvolver as habilidades dos alunos para resolver problema (um ensino "sobre" Resolução de Problemas). Para isso sugerimos um trabalho de desenvolvimento de heurísticas necessárias à produção de estratégias para resolver problemas. Este trabalho pode ser executado pelo seguinte roteiro:

1) Determinar a incógnita do problema. Muitas vezes o estudante nem sabe como começar a resolver o problema. Nesse momento o professor poderia pedir para o estudante determinar a incógnita do problema, ou seja, o que o problema pede para ser determinado, calculado ou respondido. Conhecer que solução se pretende determinar é a base para entender o problema (primeiro passo de Polya). Isso faz com que o estudante dê o primeiro passo para se envolver com o problema e produzir pensamentos ativos e reflexivos que poderá ajudá-lo no processo de resolução.

2) Conhecer as condicionantes. Nesta etapa o professor deve orientar o aluno a buscar entender que tipo é a incógnita do problema. Se é número (se pode ser positivo, negativo, zero. Se pode ser fracionário, irracional, etc.), se é uma equação, uma matriz, ... Esse conhecimento da incógnita pode levar o estudante a delimitar a área de busca, o campo de estudo e até mesmo os conhecimentos matemáticos possíveis para resolver o problema.

3) E para concluir a resolução do problema o professor pedirá aos alunos que construa uma representação que posso ilustrar a incógnita do problema, podendo ser um desenho, uma tabela, uma frase, uma expressão algébrica ou até mesmo um pensamento capaz de explicitar os dados do problema; e, qualquer outra representação

matemática ou simbólica dos dados que ajude no entendimento e/ou resolução do problema.

- Com os alunos já familiarizados com a Resolução de Problemas, partiremos para um ensino "através" da Resolução de Problemas na qual os alunos com a experiência de resolver problemas e explorando do contexto, elaborando novos algoritmos afim de produzir novos conhecimentos por meio da introdução de novos conceitos.

- E, por fim, faremos um ensino "para" Resolução de Problemas com intuito de fixar os novos conceitos conhecimento do aluno e ajudá-lo usar seu conhecimento matemático para resolver problemas. Vale ressaltar que as duas últimas etapas serão sempre fundamentadas em um ensino sobre resolução de problemas e que muitas vezes essas três abordagens se interagem e o podem ocorrer simultaneamente.

Gostaríamos de salientar que este roteiro é apenas uma sugestão para orientar professores que não possuem experiência com essa metodologia de ensino. Diante disso, sugerimos que o professor procure sempre adequar essa proposta a sua própria realidade, buscando novos problemas e novas maneiras de fazer esse trabalho, e assim atingindo seu objetivo que é a aprendizagem de seus alunos.

Ensino "sobre" Resolução de Problemas

Nesse encontro, o Professor deverá propor o Problema 1, a ser desenvolvido pelos alunos fazendo uso da abordagem de um ensino "sobre", cujo foco, como já foi mencionado anteriormente neste texto, é desenvolver habilidades nos estudantes em resolver problemas. Para que isso se realize o Professor poderá pedir que os alunos formem grupos para resolver as atividades desses encontros.

Problema 1[2]: Um terreno retangular mede 36 m de comprimento por 21 m de largura.

[2]Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 34) *apud* Noguti (2014, p. 226).

Fonte: Disponível em < https://www.urbaville.com.br/5-dicas-para-comprar-um-terreno-em-loteamento-de-forma-segura/>. Acesso: 29 de Abril de 2020.

O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores, plantadas a iguais distâncias umas das outras, e quer manter entre as árvores a maior distância e o maior número de árvores possível, e a distância entre elas deve ser um número inteiro. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual deverá ser a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

Nessa etapa, deve-se deixar os estudantes tentar resolver o problema sem a intervenção do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a resolver o problema. Propomos ao professor que procurar auxiliar o aluno que comece por fazer algumas indagações, com naturalidade, como por exemplo: qual é a incógnita do problema? Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? Segundo Polya (1995) "a finalidade destas indagações é focalizar atenção do aluno na incógnita"., pois como é sabido nossos alunos não tem o costume em trabalhar dessa maneira, porém no decorrer dos encontros eles foram se adaptando a essa proposta de ensino e mostrando bastante entusiasmado.

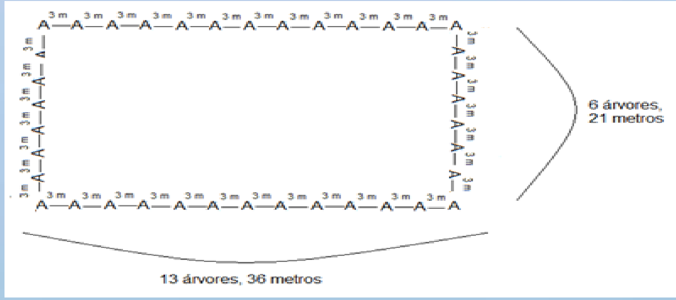
Para ilustrar como se deu a aplicação dessa atividade em sala de aula, apresentamos uma possível resolução do Problema 1 e o diálogo envidenciando uma discussão entre os grupos e o Professor-Pesquisador.

Qual é a incógnita do problema? ou o que é que se deve procura? qual será a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

Quais são os *dados do problema? ou do que é que se precisa?* Um terreno retangular de medidas 36 m de comprimento por 21 m de largura; este terreno deverá ser cercado com árvores, plantadas a iguais distâncias umas das outras; deve-se manter entre as árvores a maior distância possível; o número de árvores plantadas deve ser o maior possível; e, a distância entre as árvores deve ser um número inteiro (em metros).

Qual é a condicionante do problema? e quais os conhecimentos envolvidos na questão? plantio de árvores em um terreno retangular, quantidade de árvores a ser plantadas a uma certa distância e os conhecimentos envolvidos são perímetro e aritmética. E para ilustrar a incógnita do problema podemos desenhar um retângulo e algumas árvores.

Quadro 1 – Representação do Problema 1



Fonte: Cálculo do máximo divisor comum entre 21 e 36, Noguti (2014, p. 226)

Quando questionados sobre os resultados encontrados, os grupos se manifestaram apresentando suas possíveis soluções da quantidade de árvores que poderiam ser plantadas, conforme podemos ver a seguir:

> *G_5: Professor, nós encontramos 38 árvores.*
> *P_p: Uhm.... tá bem!!! Como chegaram a esse valor?*
> *G_5: A gente somou os lados do retângulo que totalizaram 114 m e depois dividimos por 3.*
> *P_p: Sim, mas como vocês chegaram à conclusão do porquê deveriam dividir por 3?*
> *G_5: Professor, tentamos vários valores, porém o que dava um número inteiro eram 3 e 6. E como no problema foi dito que deveria se ter a maior quantidade de árvores plantadas, consideramos o 3, totalizando 38 árvores.*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Quando o Grupo 5, em discussão na sala aula, apresentou sua resolução, a que acabamos de discutir, os estudantes desse grupo afirmaram que para dividir de 114 e obter um número inteiro, deveriam escolher como divisores 3 ou 6 e, a partir disso, concluíram que a maior distância entre as árvores seria 3 metros eles não perceberam que os divisores de 114 não são apenas 3 e 6, de fato os divisores de 114 são (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114). Portanto, a maior distância possível entre as árvores seria o maior divisor comum entre 21 e 36, que é 3. O quadro 1, a seguir, ilustra essa situação.

Portanto, a maior distância entre as árvores será 3 m e o total de árvores será: = 6 + 6 + 13 + 13 = 38 árvores.

Feita a correção do Problema 1 com a turma, com o intuito de promover condições para que os alunos tenham um pensamento ativo e reflexivo sobre esses problemas e, consequentemente, desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Na terceira etapa deste Produto Educacional que denominamos de um ensino “para” Resolução de Problemas sugerimos uma lista de atividades com alguns Problemas para o professor da trabalhar em sala de aula com objetivo de construir estratégias para resolver problemas.

Ensino “ATRAVÉS” Resolução de Problemas

Iniciando o encontro o professor apresenta uma situação-problema e procura levar os alunos à construção de um novo conhecimento matemático com uma atividade em que se faz necessário o uso de logaritmos no decorrer da resolução. Com isso deverá explicar para os alunos qual conteúdo será necessário para dar continuidade às atividades. Mostrando o histórico do Logaritmo, suas aplicações, qual seu significado, bem como as mudanças que teve, desde quando foi pensado como um facilitador de cálculos e métodos para resolver problemas complexos.

Conceitos de Logaritmos (definição e propriedades)

O Professor poderá desenvolver essa etapa pedindo que os alunos formem duplas e tentem resolver o seguinte problema com as seguintes orientações:

1. Ler o problema individualmente;
2. Ler o problema junto com o seu colega de grupo;
3. Discutir o que é pedido no problema e quais as suas condicionantes;
4. Ao final da resolução um da dupla explicar a resolução do grupo;
5. Resolver o problema.

Problema 2: Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente.

Fonte: Disponível em: <https://www.estudopratico.com.br/america-latina-origem-do-nome-e-economia/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Logo após as duplas terminarem a leitura e resolução do problema, o professor realizou uma leitura do problema em voz alta, com intuito de questiona os estudantes se foi possível a resolução do problema, se não, quais foram as dificuldades encontradas e porque não conseguiram obter sucesso na resolução. Desenvolvemos uma possível forma de estratégia para resolução do problema e assim construir conceitos de logaritmos e aplicar a abordagem "através".

Incógnita do problema ou que é que determinar: em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Dados dos problemas: a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente;

Condicionante do problema e *Correlações:* trata do crescimento demográfico na América Latina com isso precisa ser um número inteiro positivo.

Representação:

Tempo	População
Início	P (o)
1 ano	P (1) = P (o) + P (o) * (1,012)
2anos	P (2) = [P(o) * (1,012)].(1,012)= Po.$(1{,}012)^2$
3 anos	P (3) = Po $(1{,}012)^3$
….	…….
X anos	P (x) = P (o) $(1{,}012)^x$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Formalização

Supondo que a população dobrará após x anos, tem-se:

$P(x) = 2P(o)$, daí: $P(o)(1{,}012)^x = 2P(o) \leftrightarrow (1{,}012)^x = 2$

Como se pode observar, não é possível resolver esse tipo equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui. Com objetivo de transformar uma equação exponencial como essa em uma igualdade entre potências de mesma base, desenvolver-se-á a noção de **Logaritmo**.

O professor fará um breve relato da história dos logaritmos, e introduzirá a definição de logaritmos, sua condição de existência e as consequências de sua definição e assim resolvendo alguns exemplos com os alunos. E como sugestão de atividades propomos uma lista de atividades para fixação dos novos conhecimentos adquiridos que se encontra na terceira etapa deste Produto Educacional.

Função Logarítmica

Iniciando o encontro com uma situação-problema para construir a ideia de Função Logarítmica, fazendo uso da vertente "através" na Resolução de Problemas, pretende-se que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecendo relações entre essas ideias, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e, assim, desenvolver capacidade de resolver problemas como foi proposto na primeira etapa deste plano de ensino.

Problema 3[3]: Nivaldo está depositando suas economias em caderneta de poupança especial, que rende 2% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre?

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do problema:

I. *Incógnita do problema:* Qual a quantidade de meses para que o valor depositado dobre o seu valor?

II. *Dados:* depositando suas economias que rendem 2% a.m.

III. *Correlações:* Matemática Financeira.

IV. *Conhecimentos específicos:* porcentagem, juros e montante.

V. *Representação:*

Tempo (Mês)	Rendimento
Início	C
1	C1= c + 2% de c = 1,02c
2	C2 =1,02 + 2% (1,02C) = $(1,02)^2$C
3	C3 = $(1,02)^2$C+ 2% $(1,02)^2$C = $(1,02C)^3$
….	…….
N meses	N=C $(1,02)^n$C

Fonte: elaborado pelo autor (2018)

[3] Problema retirado IEZZI *et al.* (2004) pág. 226.

Possíveis formas para resolução do problema:

Vamos chamar de *c* o valor inicial depositado por Nivaldo. *Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês da aplicação?*

Será c + 2% de c = c + 2/100 c = c + 0,02 c = 1, 02 c.

Qual será o saldo em conta no final do 2ºmês de aplicação?

Bem, no 2º mês o rendimento de 2% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º, ou seja, sobre 1,02 c.

Assim, teremos o saldo de:

$1,02 + 0,02.(1,02c) = 1,02c\ (1 + 0,02) = (1,02)^2\ c$

Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?

Será $(1,02)^3c$.

Qual será o saldo na poupança no final de n meses de aplicação?

Será $(1,02)^n\ c$

Como queremos que a importância dobre, queremos que ela fique igual a 2c no final de n meses, então:

$(1,02)^n\ c = 2c$

$(1,02)^n = 2$ aplicando logaritmos, vem:

$\text{Log}_{1,02}\ (1,02)^n = \log_{1,02} 2$

$N=\log_{1,02} 2$ (aproximadamente 35 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial triplicasse? Qual seria o número de meses?

$N=\log_{1,02} 3$ (aproximadamente 55 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por x? Qual seria o número de meses?

$N= N=\log_{1,02} X$

Enfim, para que o capital inicial seja multiplicado por x, é necessário que transcorra um prazo de n(x) meses. O valor n(x) é uma função de x dada pela lei: $N(x) = N=\log_{1,02} x$, que é um caso particular de função logarítmica.

A partir de agora, define-se formalmente a função logarítmica e investigam-se seus gráficos e relações com outras funções.

A lista de atividades para fixação da aprendizagem encontra-se na Parte III desta proposta no ensino “para” Resolução de Problemas.

Ensino “PARA” Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao ensinar “*para*” resolver problemas, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e propriedades, após isso, coloca vários exemplos tentando abranger a maior quantidade de situações. Assim, deve evindenciar estratégias e usar o conhecimento adquirido pelo aluno anteriormente na resolução das atividades propostas.

Sugestão de Atividades – 01

Para desenvolvimentos de habilidades afim de construir estratégias sugerimos esses problemas para complementar o ensino “sobre” Resolução de Problemas.

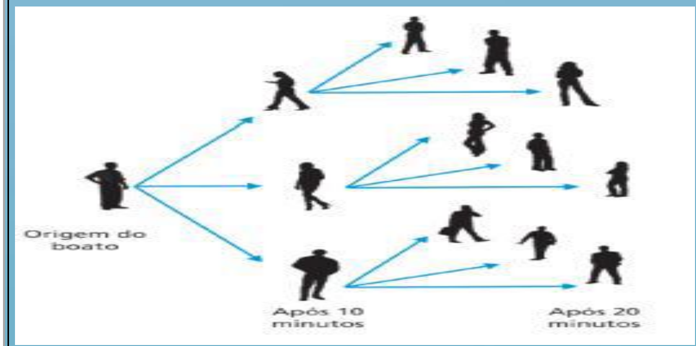
Problema 1

Ian tem menos de 100 cartões de beisebol em sua coleção. Se ele colocar em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocar em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocar em pares, sobra apenas um cartão. Quantos cartões Ian têm?

Fonte: Krulick; Rudnick, (2005, p. 28) apud Noguti, (2014, p. 234).

Problema 2

Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato, não necessariamente verdadeiro, e gasta 10 minutos para contá-lo para seus três melhores amigos. Imagine que cada um dos três amigos resolvesse fazer a mesma coisa, e 10 minutos depois tivessem contado a novidade para três colegas, que ainda não a conhecia.



Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	3x3	3^2
30	3x3x3	3^3

40	-	-
50	-	-
60	-	-
70	-	-

Assim, cada um, que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados gastando, para isso, 10 minutos. Diante disso, responda:

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

Fonte: Noguti, (2014, p. 234).

Problema 3

A figura abaixo indica um cubo de aresta a = 10 cm. Uma formiga, localizada em *A*, deseja buscar comida localizada em *B*, caminhando sobre as faces do cubo. Qual é a medida do caminho mais curto que ela pode percorrer de A até B?

FONTE: Iezzi et al (2009, p. 316).

Sugestão de Atividades para fixação dos conceitos de logaritmos – 02

1) O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo **t**, é dado pela função $N(t) = N_o. e^{xt}$, em que N_o é o número inicial de bactérias e x é a taxa de crescimento.

Fonte: Disponível em: < https://www.infoescola.com/microbiologia/cultura-bacteriana/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Se a taxa de crescimento é de 5% ao minuto, em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o dobro da inicial? (Dado: ln2 ≅ 0,6931).

3) O pH de uma solução é definido por $\mathbf{pH = \log \frac{1}{[H^+]}}$, sendo $[H^+]$ a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução.

Fonte: Disponível em: < https://canalmetrologia.com.br/existe-ph-negativo-ou-maior-que-14/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Calcule o **pH** de uma solução que tem $[H^+] = 12.\ 10^{-8}$ íons-grama por litro. (Use log 2 ≅ 0,30 e log 3 ≅ 0,48.)

4) Calcule estes logaritmos, usando a sua definição:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{25} 0{,}008$ c) $\log 10000$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 128$ e) $\log_2 64$

f) $\log_8 \frac{1}{2}$ g) $\log_5 3125$ h) $\log \sqrt[3]{3}\ \sqrt[4]{3}$ i) $\log_8 32$

5) Calcule o valor de x:

a) $\log_x 8 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$

c) $\log_2 x = 5$

Sugestão de Atividades para fixação dos conceitos sobre as propriedades operatórias de logaritmos - 03

1) Dê o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $C = \ln e^2 - 3\ln \sqrt[3]{e} + 2\ln 1$

b) y= $\ln e^3 + \log 0{,}01$.

c) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

d) $\ln\sqrt[3]{e} + e^{\ln 2}$

e) log_(1/4) 4 + log_4 ¼

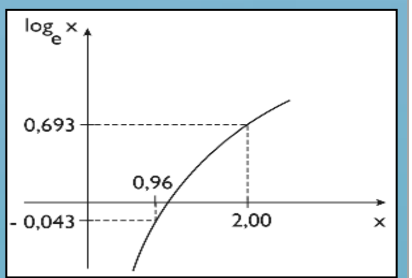
2) Sabendo que log 2=0,301, log 3=0,477, log 5 = 0,699 e log 7 = 0,845, calcule:

a) log 8 b) log 2,5 c) log 15 d) log 81 e) log 42

3) (UFGD) Uma empresa de derivados químicos considera que, quando x milhões de dólares são investidos em pesquisa, o lucro anual, em milhões de dólares, passa a ser $L(x)= 20 + 5 \log_3 (x+3)$, de quanto deveria ser o investimento em pesquisa para que o lucro anual fosse de 40 milhões de dólares?

4) Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.

A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo A = $\mathbf{C.e^{kt}}$, em que: (**C** é a massa inicial; **A** é a massa existente em **t** anos; **k** é uma constante associada ao isótopo radioativo).



Em um laboratório, existem 60 mg de ^{226}**Ra**, cujo período de semidesintegração é de 1600 anos.

Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em **mg**, a:

a) 40,2 b) 42,6 c) 50,2 d) 57,6

Sugestão de atividades para fixar os conceitos relacionados a função logarítmica – 04

1) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 (4 - x)$

b) $f(x) = \log_{(2 - x)} (x + 1)$

c) $f(x) = \log_{x} (-2x + 5)$

d) $f(x) = \log_{(2x - 3)} (-x^2 + 2x + 3)$

2) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

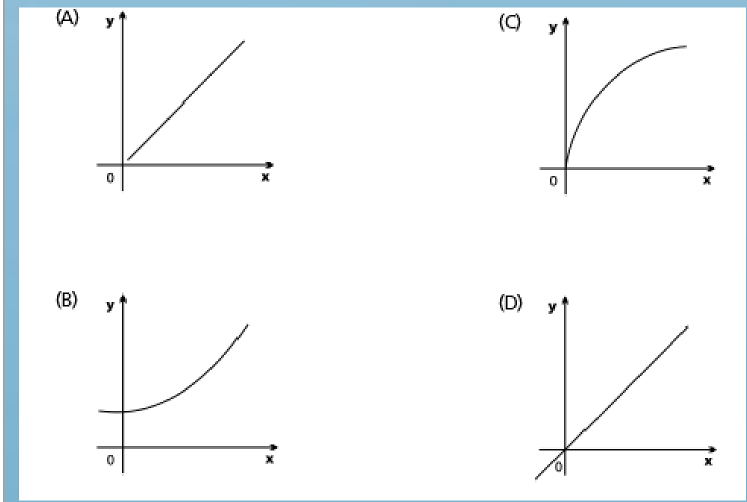
b) $f(x) = \log 1/3\ x$

c) $f(x) = 2 + \log_2 x$

d) $F(x) = \log_2(x - 1)$

3) (UERJ) A relação entre as coordenadas **x** e **y** de um corpo em movimento no plano é dada por $y = 10^{\log x}$.

O gráfico correspondente a esta relação é:



4) (UFJF-MG) Considere a função $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = \log_{10}(x^2 - 6x + 10)$

Marque a opção que expressa o valor de *f(6) – f(- 2)*.

a) 26 b) $\log_{10} 26$ c) 1 d) $\log_{10} \frac{5}{13}$ e) $1 + \log_{10} 26$

Sugestão de atividades envolvendo equações exponenciais e logarítmicas – 05

1) Resolva, em R, as seguintes equações:

a) $3^x = 5$ b) $4^x = 19$ c) $4^{x+1} = 5$ d) $4^{2x-1} = 8^{3x+2}$ e) $4^x + 3.\ 4^{x+2} = 5$

2) Resolva as equações.

a) $\log_2 (2x - 5) = \log_2 3$

b) $\log_3 (3 - x) = \log_3 (3x + 7)$

c) $\log_5 (2x - 3) = 2$

3) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre I = 0 até I = 8,9 para maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{E}{E_0}$ na qual **E** é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7.10^{-3}$ kwh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

5 Considerações

Para a construção deste Produto Educacional, focamos principalmente no ensino “através” da Resolução de problemas buscando assim construir conhecimentos relacionados a Logaritmos e Função logarítmica e na observação e orientação na forma que o estudante desenvolvia estratégias para resolução dos problemas apresentados. E, a análise do professor, de forma criteriosa sobre as ações do aluno, seja ela escrita ou falada nos momentos de plenárias, e assim possibilitar o professor a fazer as devidas intervenções.

Nesse sentido, o professor deve estar atento para o que o estudante entendeu sobre cada conceito trabalhado em sala de aula e, evidenciando a Resolução de Problemas nas abordagens do ensino “sobre”, “através” e “para”. A cada atividade discutida e resolvida, quer em forma de plenária, quer pela solução colocada em cada grupo, buscando ensinar os alunos a desenvolver estratégias de resolução de problemas.

Esperamos que este Produto Educacional possa auxiliar professores a criarem novas propostas eficientes de ensino e assim, trazer contribuições significativa voltada para o ensino-aprendizagem na construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e função logarítmica, fundamentada no ensino de Resolução de Problemas fazendo uso das abordagens “sobre”, “para” e “através”.

Esse Produto Educacional poderá ser usado por qualquer professor que tenha interesse em Ensinar logaritmos e função logarítmica, ou entender os processos de aprendizagem através da Resolução de Problemas. Além disso, poderá ser usado também por outros pesquisadores interessados em fazer investigações nessa linha de pesquisa voltadas para o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R.; Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014. p. 35 - 52.

BOYER, C. B. **História da Matemática** Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingos. – Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2004. 3ª reimp., 2008.

FERREIRA, N. C.; PEREIRA, J.C.S.; LEMOS, G. C. **Heurística de Resolução de Problemas: aspectos do ensino sobre resolução** – Revista: Conspiração – Professores que Ensinam Matemática- SBEM/MT, 2018.

PECORARI, M. **Logaritmos e Aplicações**- Rio Claro: [s.n.], 2013.

POLYA, G. A. **A arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático; Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimp. -Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA- Boletim de Educação Matemática,** v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F.C.H.; A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014. p. 53 - 68.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr.,F.K. Developing Understanding in mathematics via Problem solving, In. TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics Reston: NCTM**, 1989 (Year Book). p. 30 - 42.