INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JÚLIO CÉSAR SANTOS PEREIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

JATAÍ
2020

JÚLIO CÉSAR SANTOS PEREIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Linha de pesquisa: Fundamentos, metodologias e recursos para Educação para Ciências e Matemática
Sublinha de pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Doutor Nilton Cezar Ferreira.

JATAÍ

2020

Autorizo, para fins de estudo e de pesquisa, a reprodução e a divulgação total ou parcial desta dissertação, em meio convencional ou eletrônico, desde que a fonte seja citada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Pereira, Júlio César Santos.
Resolução de problemas como uma estratégia para o ensino-aprendizagem de logaritmos e função logarítmica [manuscrito] / Júlio César Santos Pereira. -- 2020.
176 f.; il.

Orientador: Dr. Nilton Cezar Ferreira..
Dissertação (Mestrado) – IFG – Campus Jataí, Programa de Pós – Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2020.

1. Matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Ensino-Aprendizagem. 4. Logaritmos e Função Logarítmica. I. Ferreira, Nilton Cezar. II. IFG, Campus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Wilma Joaquim Silva – CRB1/1850 – IFG/Câmpus Jataí. Cód. F005/2020/2.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

JÚLIO CÉSAR SANTOS PEREIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DE LOGARITMO E DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 02 de julho de 2020, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira -** Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes -** Membro interno - Universidade Federal de Jataí e **Prof. Dr. Egídio Rodrigues Martins -** Membro externo - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê do aluno.

(assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

À minha querida avó Tereza, com carinho e coração apertado, que foi a pedra fundamental para este momento e tantos outros em minha vida, dedico *in memorian*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que por meio de sua infinita misericórdia e amor para com minha vida, tem concebido os desejos do meu coração.

À minha mãe, às minhas irmãs e aos meus queridos sobrinhos que sempre me motivaram e compreenderam minha ausência em momentos tão marcantes para nossas vidas.

Ao meu orientador, professor Nilton, que nunca mediu esforços para atender-me, ajudar-me e ensinar-me. Obrigado, professor, pelas palavras de motivação e de exortação que foram primordiais na minha vida e principalmente por acreditar no meu trabalho, pela amizade e pela confiança que depositou em mim.

Aos amigos que foram anjos de Deus em minha vida, Célio Inácio, Luciana, Cristina Kazumi, Rodrigo e Hércules que nunca mediram esforços em ajudar, sempre me aconselhando na jornada que não foi fácil.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática pelos momentos de convivência e aprendizagem.

Aos professores membros da banca examinadora, Adriana e Egídio, pelas sugestões, críticas, opiniões e conselhos que muito contribuiu para o aprimoramento desta obra.

Aos caros colegas da sexta turma do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Goiás – Campus de Jataí. Em especial a Wagna, Regimar, Alexandre, Danúbia e Geislayne pelos momentos de convivência e aprendizado.

Ao Instituto Federal de Goiás – Campus de Jataí, pelo apoio à qualificação e por ter dado condições de realizar esse feito.

Ao Colégio Estadual em Período Integral – José Salviano Azevedo, Direção na Pessoa de Cristina Kazumi, Professora-Colaboradora na pessoa de Emiliane e aos Alunos do 1º ano C turma de 2018.

À FAPEG, pelo auxílio financeiro.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo compreender as potencialidades da Resolução de Problemas e suas contribuições para a construção de conhecimentos dos conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica. Metodologicamente, esta pesquisa teve caráter qualitativo e foi apoiada no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic. Visando alcançar tal objetivo, empreendeu-se uma pesquisa de campo, desenvolvida em 2018. Para isso, foi elaborado e conduzido, no Colégio Estadual em Período Integral (CEPI) - José Salviano Azevedo – localizado na cidade de Santa Helena de Goiás – GO, um Projeto de Ensino dividido em três etapas: um ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através da Resolução de Problemas", com o propósito de levar os alunos a desenvolverem habilidades para resolver problemas, construírem conhecimentos de Logaritmos e Função Logarítmica e aplicar seu conhecimento para resolver novos problemas. Para a fundamentação teórica sobre Resolução de Problemas foram utilizados os trabalhos: Polya (1995), Larson (1987) e Onuchic e Allevato (2011). O levantamento de evidências foi feito pela observação do pesquisador durante a aplicação do projeto de ensino na pesquisa de campo; pelo recolhimento de materiais produzidos pelos alunos, como mídias (gravações em áudio e vídeos) e pelo preenchimento de um diário de campo. Os resultados confirmaram que as três abordagens de ensino da Resolução de Problemas, "sobre Resolução de Problemas", "através Resolução de Problemas" e "para da Resolução de Problemas", se trabalhada de forma adequada e conjunta, poderá promover a construção de conhecimentos de Logaritmos e Função Logarítmica e também de outros conteúdos de matemática.

Palavras-chave: Matemática. Resolução de Problemas. Ensino-Aprendizagem. Logaritmos e Função Logarítmica.

ABSTRACT

This work has as main objective to understand the potential of Problem Solving and its contributions to the construction of knowledge of the concepts of Logarithms and Logarithmic Function. Methodologically, this research was qualitative and was supported by the Romberg-Onuchic Methodological Model. Aiming to achieve this objective, a field research was carried out, developed in 2018. For this, it was elaborated and conducted, at the State College in Full Time (CEPI) - José Salviano Azevedo - located in the city of Santa Helena de Goiás - GO, a Teaching Project divided into three stages: a teaching “on Problem Solving”, “for Problem Solving” and “through Problem Solving”, with the purpose of leading students to develop skills to solve problems, build knowledge of Logarithms and Logarithmic Function and apply your knowledge to solve new problems. For the theoretical foundation on Problem Solving the works were used: Polya (1995), Larson (1987) and Onuchic and Allevato (2011). The survey of evidences was made by the researcher's observation during the application of the teaching project in the field research; for collecting materials produced by students, such as media (audio recordings and videos) and filling out a field diary. The results confirmed that the three teaching approaches to Problem Solving, “about Problem Solving”, “through Problem Solving” and “to Problem Solving”, if worked properly and jointly, can promote the construction of knowledge Logarithms and Logarithmic Function and also other mathematical content.

Keywords: Mathematics. Problem Solving. Teaching-learning. Logarithms and Logarithmic Function.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Curricular Comum

BOLEMA - Boletim de Educação Matemática

CEPI – Colégio Estadual de Período Integral – José Salviano Azevedo

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

GPEAEM – Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática

GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas

IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

MEC – Ministério da Educação

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

PPGECM – Programa de Pós-graduação em Educação para Ciências e Matemática

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TDM – Teoria da Disciplina Mental

UEG – Universidade Estadual de Goiás

UNESP – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, como principal estratégia elaboramos e aplicamos um projeto de ensino em uma turma de estudantes do primeiro ano do ensino médio do Centro de Ensino em Período Integral (CEPI)[1] José Salviano Azevedo, localizado na cidade de Santa Helena de Goiás – GO. Cujo objetivo principal foi compreender as potencialidades da Resolução de Problemas e suas contribuições para a construção de conhecimentos dos conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica por estudantes dessa escola.

Meu interesse por este trabalho surgiu a partir de observações e reflexões ocorridas ao longo da minha atuação como docente na educação básica. Nesse período, pude perceber a dificuldade de compreensão desses conceitos de função pelos alunos durante o processo de ensino e, principalmente, durante a resolução de atividades. Há também um sentimento bastante notável da ineficiência do ensino de matemática em nossas escolas, contudo acreditamos que o aluno poderá ter prazer em descobrir, na matemática, os caminhos para se chegar à solução de um problema que lhe é proposto.

Com efeito, esta investigação apresenta uma proposta de ensino de Resolução de Problemas e suas contribuições para a construção de conhecimentos dos conceitos Logaritmos e Função Logarítmica, com a qual se construiu um produto educacional que poderá auxiliar professores e alunos no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática, isso vem ao encontro de Ferreira (2017) quando afirma que professores anseiam por maneiras mais eficientes de se ensinar matemática.

Buscando alcançar nosso objetivo, como já mencionamos, fizemos uma pesquisa de campo na qual aplicamos um projeto de ensino, que fez uso de um ensino a partir das abordagens de Resolução de Problemas, para a construção de conhecimentos relacioandos a Logaritmos e Função Logarítmica. Com base nessa estratégia, fundamentado em outras pesquisas e com foco no nosso objetivo, propomos a seguinte questão de investigação: *"Como um Ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através Resolução de Problemas" poderia contribuir para a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e de função logarítmica?"*

---

[1]Centro de Ensino em Período Integral - (CEPI) José Salviano Azevedo. A seleção da escola de tempo integral foi feita pelo Ministério da Educação, quando foram selecionadas 20 escolas no estado de Goiás e convidadas a participar dessa nova proposta (o Novo Ensino Médio – Medida Provisória nº 746/2016), porém foi facultado às escolas. A escola que aceitou a proposta entrou no programa de fomento, ou seja, receberá verbas específicas para adequação da estrutura física.

Ferreira (2017, p. 17) afirma que "a Resolução de Problemas vem se consolidando, a cada dia, como uma teoria importante no contexto didático-pedagógico, tendo um papel fundamental no processo ensino, aprendizagem e avaliação de matemática".

Ainda na graduação, já no último ano do curso de licenciatura em Matemática, tive o primeiro contato com a Educação Matemática, na qual fiz a leitura do Livro "Educação Matemática - Teoria à Pratica" de Ubiratan D`Ambrósio, inclusive era orientador do professor que estava me orientando no trabalho de conclusão de curso. Essa experiência foi um fator preponderante que gerou motivação para empreender esta pesquisa e seus desdobramentos. Tempos depois, participei do processo seletivo para aluno Especial do Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática do IFG – Câmpus de Jataí, onde cursei a disciplina de Tópicos de Matemática[2], a qual foi essencial para o meu início como pesquisador na Educação Matemática.

Embora durante esta pesquisa sejam utilizados vários termos em 1ª pessoa do plural (fazendo referência tanto ao Professor-Pesquisador quanto ao orientador da pesquisa), em certos momentos deixo evidente algumas de minhas percepções particulares em relação aos fenômenos de estudo.

Atualmente, trabalho com a matemática no ensino fundamental e ensino médio, tanto em escola pública quanto escola privada, e no decorrer dos anos venho percebendo os resultados das aulas às vezes desmotivadores, porque os estudantes, em grande maioria, não conseguem associar a matemática à vida cotidiana ou nós professores não conseguimos fazer tais conexões. A formação prévia dos alunos é bastante variada também, desde alunos com base matemática mais sólida até alunos com dificuldades em operações básicas.

A partir dessas inquietações, decidi em acordo com o professor orientador desta pesquisa, entender como uma metodologia pautada nas abordagens da Resolução de Problemas poderia contribuir para formação continuada do professor bem como para o ensino e aprendizagem do aluno. Com isso, surgiu o interesse pela Resolução de Problemas e suas contribuições para construção de conhecimentos sobre conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica. No decorrer do trabalho, serão esclarecidas essas teorias de forma aprofundada, por ora, contudo, cabe antecipar que o pensamento dessa metodologia entende que resolver problemas matemáticos não deve ser uma tarefa mecânica, mas que se embasam no pensamento crítico, na escolha de técnicas de resolução dos problemas, no levantamento das informações observadas, na relação de parceria entre professor-aluno-outros alunos, e assim por diante.

---

[2] Tópicos de Matemática: disciplina que compõem a grade curricular do núcleo específico de educação para ciências e matemática.

Em se tratando da metodologia de pesquisa empregada nesta dissertação, que se embasa na pesquisa qualitativa, em que os dados são relevantes não por sua quantidade, mas por sua qualidade, características e possibilidades de associação com as teorias disponíveis acerca da temática. Com o fito de empreender essa análise qualitativa, empreendeu-se uma pesquisa de campo efetuada no Colégio Estadual de Período Integral José Salviano Azevedo, na cidade interiorana de Santa Helena de Goiás, no Estado de Goiás.

Durante os encontros realizados com uma turma de primeiro ano do ensino médio, foram aplicadas as três abordagens de Resolução de Problemas que consiste em um ensino "sobre Resolução de Problemas", "através Resolução de Problemas" e "para Resolução de Problemas". Foi acordado, com a coordenação do colégio bem como com a Professora-Colaboradora da escola-campo (professora regente da turma a que desenvolvemos a pesquisa) a qual aceitou o convite em trabalhar juntamente com o Professor-Pesquisador durante o processo de desenvolvimento da pesquisa, que os conteúdos abordados fossem os Logaritmos e as Funções Logarítmicas, os quais já estavam previstos no cronograma da grade curricular do Estado de Goiás.

À medida que foram transcorrendo os encontros, as experiências e as observações foram sendo registradas em um caderno de campo e com o auxílio do recolhimento de material em áudio e vídeo, visto que essa seria uma maneira de, mais tarde, fazer uma análise afim de se vislumbrar de maneira mais clara os dados colhidos.

A presença das três abordagens de ensino da Resolução de Problemas, mostraram que durante os encontros iniciais, alguns entraves em sua implantação, visto que os sujeitos da pesquisa ainda não tinham trabalhado com essa metodologia, contudo, à medida que passavam os encontros, os trabalhos desenvolvidos em sala de aula e a interrelação dos alunos, do Professor-Pesquisador e da Professora-Colaboradora foi tomando forma, melhorando o vínculo afetivo e de reciprocidade, além de despertar nos estudantes o interesse dos alunos no desenvolvimento das atividades.

Dessa forma, foi possível verificar que os resultados confirmaram que as três abordagens de ensino da Resolução de Problemas, se trabalhada de forma adequada e conjunta, poderá trazer contribuições significativas para a construção de conhecimentos de Logaritmos e Função Logarítmica e também de outros conteúdos de matemática que possam ser trabalhados de forma similar.

Por fim, à guisa de esclarecimento, a estrutura deste texto adotou a seguinte divisão: o segundo capítulo apresentará a metodologia de pesquisa empregada. Nesse capítulo, far-se-á uma incursão pelo percurso metodológico que foi estruturado durante sua condução, elucidando o tema da pesquisa, sua pergunta geradora, bem como os objetivos gerais e específicos, elucidando as atividades do método metodológico de Romberg-Onuchic, as quais foram seguidas para que fosse possível chegar ao objetivo deste trabalho.

O terceiro capítulo apresenta um estudo sobre Resolução de Problemas, enfocando suas e suas principais características.

O quarto capítulo, por sua vez, de caráter específico, faz um histórico da invenção do conceito de logaritmos e a criação das funções logarítmicas, situando o leitor para que compreenda as características técnicas desse conteúdo matemático com o cotidiano humano. Assim, abordam-se as diferentes visões acerca de logaritmos que foram estabelecidas por diversos teóricos em se tratando da gênese, desenvolvimento e atual conceituação de logaritmos e funções logarítmicas. Será esclarecido também como tais conteúdos se relacionam ao ensino de matemática atualmente e sua importância dentro do contexto da resolução de problemas.

O quinto capítulo apresenta as estratégias e procedimentos empreendidos durante a pesquisa, isto é, mostrar-se-á passo a passo como a pesquisa se desenvolveu, desde as primeiras ideias e procedimentos para sua implantação, até as estratégias usadas nos encontros do Professor-Pesquisador na escola-campo.

O sexto capítulo procurará trazer a análise de dados e interpretação das evidências coletadas, apresentando as experiências vividas pelos alunos, pelo Professor-Pesquisador e pela professora-colaboradora por meio de relatos transcritos, fotos e narração de cada etapa em cada encontro. Essa análise de dados, por sua vez, vai antecipar, por fim, o último capítulo, no qual são apresentadas as considerações finais, mostrando as impressões e considerações que tivemos, como pesquisadores, acerca da temática teórica desenvolvida em forma de pesquisa na escola campo.

O sétimo capítulo última parte do trabalho, retomando a pergunta da pesquisa, no qual apresentamos as conclusões que tiramos da implementação e desenvolvimento do Projeto de Ensino que fez uso de um ensino a partir das abordagens da Resolução de Problemas, e com base no referencial teórico disposto nos Capítulos II, III e IV afim de respondê-la. Além disso, comentamos algumas limitações que percebemos na sua implementação e salientamos as contribuições do trabalho para com a Educação Matemática.

Espera-se que, com esse estudo, o ensino de matemática possa torna-se mais atrativo para alunos, e uma proposta de trabalho de ensino significativo, para servir de base à pesquisadores e professores, para novas pesquisas ou como metodologia de ensino capaz de promover motivação e estímulos em seus alunos, os quais igualmente poderão perceber o encantamento que a matemática pode trazer para facilitar a vida cotidiana do homem moderno.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos nosso fenômeno de interesse, ou seja, o tema central da nossa pesquisa. Apresentamos também a abordagem utilizada para coleta e análises dos dados que compuseram o nosso *corpus*. E, ainda, evidenciamos os objetivos e a metodologia científica a ser utilizada durante todo o processo investigativo.

2.1 O Percurso Metodológico da Pesquisa

Antecipamos que, para melhor desempenho de todo o processo investigativo, adotamos como guia para nossa pesquisa o modelo metodológico elaborado por Thomas A. Romberg, apresentado em seu artigo: *Perspectives on Scholorship and Research Methods* (Perspectivas sobre Educação e Métodos de Pesquisa) publicado em 1992 no livro Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Capítulo 3, p. 49 – 64; Traduzido e republicado por Lourdes de La Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero, na Revista Bolema – boletim de Educação Matemática nº 27, ano 2007.

Para iniciar uma investigação, faz-se necessário conhecer as características de pesquisa existentes, de acordo com a classificação feita por teóricos da área, a fim de definir os instrumentos e os procedimentos que um pesquisador deve utilizar durante o processo de investigação, categorizando sua forma metodológica de estratégias investigativas. Do ponto de vista da natureza da pesquisa, segundo Kauark *et al.* (2010, p.26), ela pode ser:

> **Pesquisa Básica:** objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais.
> **Pesquisa Aplicada:** objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigida à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais.

Dessa forma, conhecer o tipo e as características da pesquisa ajuda o pesquisador a nortear e a utilizar ferramentas apropriadas que darão melhores resultados ao desenvolvimento da pesquisa, frente aos seus objetivos, considerando a natureza, a abordagem, o propósito e os procedimentos coerentes para angariar os dados relevantes.

A natureza desta pesquisa ficou caracterizada com uma pesquisa aplicada, pois, sendo desenvolvida no âmbito de um Mestrado Profissional, com isso faz-se necessário após todo o desenvolvimento dos trabalhos demandados pelo processo de investigação, construir um produto, no caso deste estudo em particular, educacional, pronto para ser aplicado na produção de resultados voltados à melhoria da educação.

Quanto à abordagem do problema, pelo fato de a pesquisa lidar diretamente com os sujeitos, buscando interpretar suas ações, seu desenvolvimento, suas relações, etc., caracteriza esta pesquisa como qualitativa, pois Kauark *et al*. considera que, em uma pesquisa qualitativa:

> Há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (2010, p. 26).

Devido à aproximação do pesquisador com os sujeitos pesquisados e partindo da necessidade de conhecer a realidade social em que os pesquisados estão inseridos, tornando essa realidade transformadora e buscando uma metodologia adequada, começamos analisando o caráter da pesquisa a ser empreendida. Do ponto de vista da abordagem do problema ou da conjectura, reafirmamos nossa pesquisa como qualitativa, considerando o que Triviños salienta:

> A pesquisa qualitativa surge na Antropologia de maneira mais ou menos natural. Coletando informações sobre vida dos povos não podendo ser quantificadas e precisando ser interpretados de forma mais ampla que circunscrita de posicionamentos teóricos. Por entender que este enfoque é, o que melhor permite compreender a prática educacional como relação entre racionalidade e a realidade, entre a essência do ser e o conceito (1987, p. 120).

Ademais, Triviños (1987, p. 117) ressalta que o teor de qualquer enfoque qualitativo que se desenvolve será dado, por um lado, pelo referencial teórico, no qual o pesquisador se apoie, de natureza desreificadora dos fenômenos, do conhecimento e do ser humano; e, por outro, relacionada com aquela, a rejeição da neutralidade do saber científico. Por isso, consideramos como válido o enfoque histórico-estrutural para nossa realidade social que, empregando o método dialético, é capaz de assinalar as causas e as consequências dos problemas, suas contradições, suas relações, suas qualidades, suas dimensões quantitativas, se existem, e realizar, por meio da ação, um processo de transformação da realidade que interessa.

Justifica assim Chizzotti:

> O termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os

> significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível e, após este tirocínio, o autor interpreta e traduz em um texto, zelosamente escrito, com perspicácia e competência cientificas, os significados patentes ou ocultos do seu objeto de pesquisa (CHIZZOTTI, 2003 p. 2).

Com base na perspectiva epistemológica crítica, adotamos como pesquisa aplicada a do tipo *intervenção pedagógica*.

O termo intervenção é utilizado nas áreas da Psicologia e da Medicina há bastante tempo. Seu emprego na educação, entretanto, não é comum e tem causado reações que indicam certo estranhamento na comunidade acadêmica ligada a essa área. Damiani (2012), por exemplo, denomina intervenções como sendo

> [...] as interferências (mudanças e inovações), propositadamente realizadas, por professores/pesquisadores, em suas práticas pedagógicas. Tais interferências são planejadas e implementadas com base em um determinado referencial teórico e objetivam promover avanços, melhorias, nessas práticas, além de pôr à prova tal referencial, contribuindo para o avanço do conhecimento sobre os processos de ensino/aprendizagem neles envolvidos. Para que a produção de conhecimento ocorra, no entanto, é necessário que se efetivem avaliações rigorosas e sistemáticas dessas interferências (DAMIANI, 2012, p. 3).

O emprego da palavra intervenção pedagógica, para denominar determinado tipo de pesquisa educacional relacionada ao processo de ensino e aprendizagem, serve também para apresentar práticas consideradas inovadoras com o propósito de maximizar a aprendizagem dos alunos, com isso, pode ser vista como um passo no processo de ascensão do abstrato ao concreto, representando o movimento de aplicação das abstrações teóricas, a fim de entender a realidade concreta.

Outrossim, de acordo com Damiani (2012), as características da pesquisa do tipo de intervenção têm os seguintes aspectos:

> 1) são pesquisas aplicadas, em contraposição a pesquisas fundamentais; 2) partem de uma intenção de mudança ou inovação, constituindo-se, então, em práticas a serem analisadas; 3) trabalham com dados criados, em contraposição a dados já existentes, que são simplesmente coletados; 4) envolvem uma avaliação rigorosa e sistemática dos efeitos de tais práticas, isto é, uma avaliação apoiada em métodos científicos, em contraposição às simples descrições dos efeitos de práticas que visam à mudança ou inovação (DAMIANI, 2012, p. 7).

Assim, a pesquisa não se objetiva em apenas observar e analisar o objeto em estudo, mas em compreendê-lo para melhoria que podem ser pensadas e desenvolvidas de forma positiva durante a prática de ensino-aprendizagem na relação professor e aluno.

Dentre os métodos para desenvolver e aplicar esta pesquisa, optamos por aquele que mais se adapta ao que temos em mente em seu desenvolvimento, como salienta Romberg (2007):

> O que diferencia um método de outro não é só o modo como a informação é coletada, analisada e relatada, mas, também, os próprios tipos de perguntas tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos para investigar tais perguntas estão baseadas (ROMBERG, 2007, p. 97).

Nesse ínterim, seguindo as ideias de Romberg supracitadas, construímos nosso processo de investigação guiado pelo seu modelo metodológico.

2.1 Modelo Metódologico de Romberg para se conduzir uma investigação científica

Para fundamentarmos nossa pesquisa, apoiamo-nos nas atividades descritas por Thomas A. Romberg[3], as quais estão apresentadas em seu artigo *Perspectives on Scholorship and Research Methods* (Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa), traduzido por Onuchic e Boero e publicado sob responsabilidade do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) – Rio Claro/SP.

Romberg (2007) procurou identificar, nas ciências sociais, as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como essas tendências tem influenciado o estudo da Matemática nas escolas. E, ainda, propôs um cronograma de atividades subdivididas em três blocos, comuns à grande maioria de métodos de pesquisa, tais métodos visam orientar o pesquisador ao longo do seu trabalho.

Assim, baseando-nos em alguns teóricos, esta pesquisa ficou caracterizada como pesquisa aplicada do tipo intervenção pedagógica, pois buscou solucionar um problema que o pesquisador sentia durante suas aulas de matemática nas turmas de primeiro ano do ensino

[3]Thomas A. Romberg, nascido em 1932, Burlington/Colorado, Professor de Educação da Bascom e Professor Emérito do Departamento de Currículo e Instrução da Universidade de Wisconsin/Madison, com bacharelado em Matemática, Mestre em Educação Secundária pela Universidade de Nebraska/Omaha e doutor em Educação pela Universidade de Stanford.

médio, ao perceber que seus alunos tinham receio aos estudos de logaritmos, apesar de não ter estudado, assim propomos um trabalho de nível de mestrado que desencadeou nossa dissertação, que no nosso caso foi o uso das abordagens da Resolução de Problemas.

Dessa forma, escolhemos, também, esse tipo de pesquisa por considerarmos que seria possível, com sua aplicação, oferecendo uma metodologia a mais para poder amenizar essas e outras questões pertinentes ao ensino-aprendizagem durante as aulas de matemática, e assim propomos aos alunos do primeiro ano do ensino médio do CEPI – José Salviano Azevedo, localizado na cidade de Santa Helena de Goiás, um Projeto de Ensino que fazia uso das abordagens do ensino da Resolução de Problemas. Portanto, buscamos em uma pesquisa com esse caráter interventivo, contribuir para construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de Logaritmos e de Função Logarítmica, tendo por base responder à questão norteadora deste trabalho, que apresentaremos ainda neste capítulo.

Por conseguinte, seguindo as ideias de Triviños (1987), Romberg (2007), Chizzotti (2003), Kauark (2010) e Damiani (2012), optamos por utilizar o modelo metodológico de Romberg-Onuchic, adaptado do modelo de Romberg, já citado, com algumas contribuições apresentadas por Lourdes de La Rosa Onuchic; para guiar os passos durante a produção de um trabalho com este enfoque metodológico.

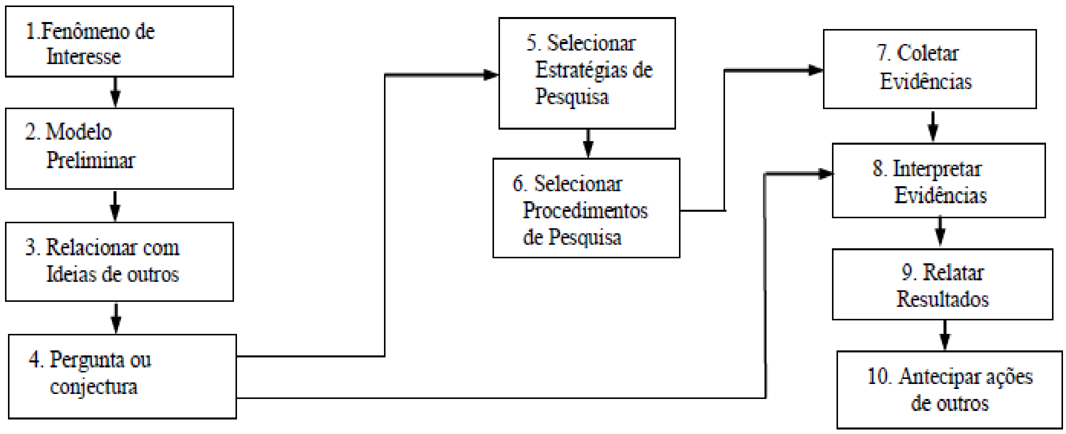
2.2 O modelo de Romberg e Romberg-Onuchic

Para situar nossa pesquisa, discorremos um pouco sobre como esse modelo metodológico se configurou como um guia de pesquisa no Brasil, mais especificamente para o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), com sede na cidade de Rio Claro/SP, na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP. Esse grupo, coordenado por Lourdes de La Rosa Onuchic, compreendendo necessário adotar um guia para suas pesquisas e, alguns estudos relacionados passaram utilizar o Modelo Metodológico de Romberg. Após alguns anos, membros desse grupo sugeriram algumas modificações a esse modelo, acrescentando uma nova atividade a ser desenvolvida ao longo da pesquisa e apresentando novas interpretações sobre as pontuações feitas em Romberg (2007). Esse novo modelo com essas modificações passou a ser denominado Modelo de Romberg-Onuchic e foi apresentado formalmente em Onuchic e Noguti (2014).

Segundo Romberg (2007, p. 98) “não há nada de exclusivo nesta lista [isto é, nas atividades apresentadas por esse modelo], de fato quase todo texto de métodos de pesquisas resume um conjunto semelhante de atividades”. Assim, ele ressalta que, embora as atividades estejam em uma ordem sequencial, elas não precisam necessariamente serem seguidas e/ou executadas nessa ordem, deixando o pesquisador livre para adequar a sua pesquisa ao modelo proposto e alterá-lo tão logo julgue necessário.

Considerando a definição de Goldenberg (2001) *apud* Noguti (2014 p.22), Romberg não mostra simplesmente um caminho para se chegar a um fim, mas igualmente os estudos dos caminhos a serem seguidos e instrumentos usados para se fazer ciência, sendo, portanto, não apenas um caminho a ser seguido, mas também um caminho a ser pensado e, para tanto, uma autêntica metodologia de pesquisa.

Figura 1 - Fluxograma do Modelo de Romberg



Fonte: Romberg, (2007, p. 98).

Pode-se, assim, descrever o esquema de atividades propostas acima em três blocos. O primeiro bloco compreende as atividades: fenômeno de interesse; modelo preliminar; relacionar com ideias de outros; e pergunta ou conjectura. O segundo bloco apresenta as atividades: selecionar estratégias de pesquisa; e selecionar procedimentos de pesquisa. Por fim, o terceiro e último bloco propõe as atividades: coletar evidências; interpretar evidências; relatar resultados; e antecipar ações de outros.

Como pode ser observado na Figura 1, no primeiro bloco, Romberg (2007) afirma serem as atividades as mais importantes, pois essa etapa da pesquisa se destina ao envolvimento do pesquisador com os elementos da pesquisa, levando-o a evidenciar seu fenômeno de interesse, idealizar um modelo preliminar para sua pesquisa e assim buscar saber quais avanços já houve nessa direção, relacionando o que já tem em mente com ideias de outros pesquisadores que já trilharam o mesmo caminho, assim se consegue definir um problema particular para guiar seus passos até o final da pesquisa.

No segundo bloco, Romberg (2007) salienta que o pesquisador deve construir suas estratégias e procedimentos capazes de guiá-lo pelos caminhos para a resolução do seu problema de pesquisa ou da sua conjectura levantada; e é nesse momento que o pesquisador deve tomar decisões sobre “o que” e “como” fazer para conseguir alcançar seus objetivos.

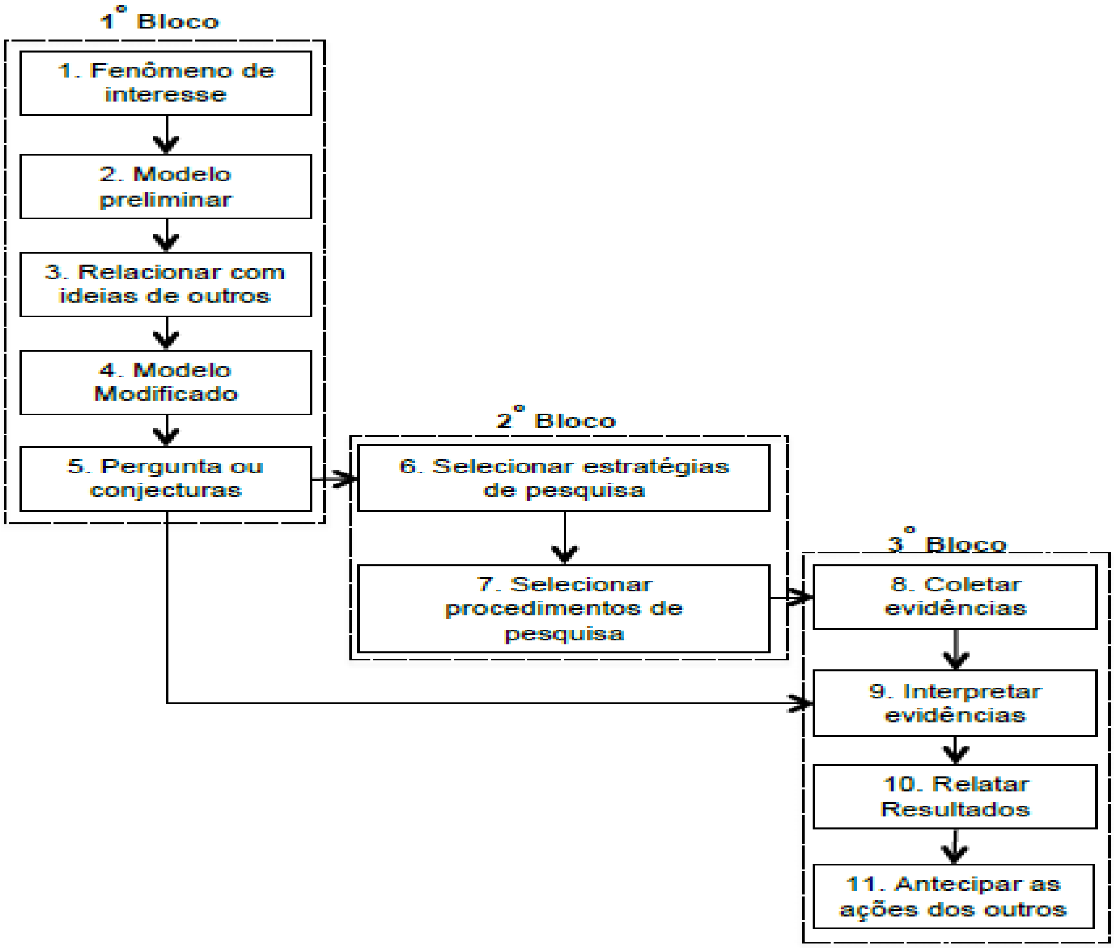
No terceiro e último bloco, por fim, Romberg (2007) ressalta que, como o pesquisador já aplicou aquilo que foi planejado, com o objetivo de coletar e selecionar evidências relevantes à pesquisa é momento de fazer a interpretação dessas evidências, relatarem os resultados encontrados, submeter o trabalho à avaliação de membros da área e apresentar os resultados obtidos à sociedade, para que possam ser usados ou servir de suporte para novas investigações.

Onuchic e Noguti justificam a necessidade de se pensar em um modelo modificado, conforme se lê:

> O pesquisador deve estar a par de pesquisas já desenvolvidas, ou que estão em desenvolvimento, relacionadas ao seu tema de trabalho. Conhecendo o que outros pesquisadores pensam, suas ideias e concepções teóricas, ele terá subsídios para preencher eventuais lacunas de pesquisa e saberá como tais ideias e concepções podem ampliar, explicar ou modificar o seu Modelo Preliminar levando-o a um Modelo Modificado (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 62).

Como norteador da nossa pesquisa, utilizamos o Modelo de Romberg-Onuchic constituído do Modelo de Romberg, com o acréscimo de uma nova atividade no primeiro bloco, denominado Modelo Modificado; como mostra a Figura 2; juntamente com algumas novas interpretações.

Figura 2 - Modelo de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic e Noguti (2014, p. 59).

No modelo de Romberg-Onuchic, foi inserido o Modelo Modificado, pois, acreditando que após "ouvir os outros", o pesquisador pode perceber que seu modelo preliminar se encontra defasado, ou com dados insuficientes, para formulação da pergunta da pesquisa.

2.2.1 Descrição das atividades do Modelo de Romberg-Onuchic

A seguir, faremos uma explanação da descrição das atividades no Modelo de Romberg-Onuchic:

I. Fenômeno de Interesse

O fenômeno de interesse que em muitas metodologias é conhecido como "objeto da pesquisa" ou "tema da pesquisa" se manifesta, em geral, segundo Onuchic e Noguti (2014), no campo da educação, a partir do envolvimento de professores e de alunos, e da forma como eles se relacionam e se comportam durante o processo de ensino e aprendizagem. Diante disso, o fenômeno de interesse pode surgir com uma curiosidade ou com uma inquietação do pesquisador no contexto em que está inserido.

II. O Modelo Preliminar

O Modelo Preliminar é uma ideia inicial que o pesquisador deve imaginar sobre como será o desenrolar da sua pesquisa. Em princípio, o pesquisador precisará usá-lo como guia no desenvolvimento da sua pesquisa. Posteriormente, tal modelo poderá ser modificado e/ou alterado à medida que novos elementos começam a agregar o processo de investigação ou novas interpretações, ou ressignificações feitas pelo investigador. Sobre isso, Romberg (2007, p. 99) salienta que “um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como as variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados”.

O modelo preliminar poderá dar origem a uma pergunta, ou conjectura, que irá nortear o desenvolvimento da pesquisa, evidenciando, então, algumas variáveis importantes sobre o fenômeno de interesse, ou seja, apontando temas que o pesquisador deverá estudar analisar e fazer uso para fundamentar sua pesquisa. Esse modelo, como já mencionado, pode sofrer modificações decorrentes, dentre outras coisas, da ampliação de conhecimento adquirido pelo pesquisador, por meio do aprofundamento teórico originado, principalmente de outros trabalhos que já foram realizados na mesma linha de sua pesquisa.

III. Relacionar com Ideias de Outros

Relacionar com ideias de outros significa, primeiramente, ouvir outros (comunidade, pesquisadores, professores, etc.) que já trilharam os mesmos caminhos que almejamos trilhar, a respeito dos temas que queremos investigar ou sobre alguma das variáveis elencadas pelo modelo preliminar. Após ouvir esses “outros”, o pesquisador poderá refletir (concordando ou discordando) sobre o que disseram, e, a partir dessas reflexões, elencar contribuições mantendo ou modificando suas ideias iniciais sobre a pesquisa.

IV. O Modelo Modificado

O modelo modificado, apesar de não aparecer no fluxograma de Romberg, já vinha sendo usado em pesquisas do GTERP, em dissertações e em teses, como é mencionado por Onuchic e Noguti (2014, p. 62), “o modelo modificado da pesquisa em geral é mais abrangente do que o inicialmente proposto e deve conduzir o pesquisador à elaboração da pergunta ou conjectura da pesquisa”. Sendo assim, a pergunta (ou conjectura) que irá nortear a pesquisar surge quando o pesquisador relacionar o seu fenômeno de interesse com modelo modificado, cabendo lembrar que as mudanças que originam esse novo modelo têm fortes contribuições do "relacionar com ideias de outros". Vale ressaltar que nem toda pesquisa demanda um modelo modificado, isso ocorre quando o Modelo Preliminar é suficiente para o desenvolvimento da pesquisa.

V. Perguntas ou Conjecturas

Um dos principais passos no processo de pesquisa, segundo Romberg (2007), são as construções das perguntas, ou conjecturas levantadas, quando se busca compreender um fenômeno em particular. Essas perguntas ou conjecturas são baseadas na relação entre os temas que foram levantados, no primeiro bloco, com a evidência de variáveis-chave que, após um aprofundamento teórico sobre cada uma delas, levou o pesquisador a modificar a ideia que ele tinha da sua pesquisa, deixando-o pronto para começar a pesquisar. Essas perguntas ou conjecturas ajudarão a nortear a pesquisa, fazendo com que o pesquisador não perca seu foco e consiga perceber quando os objetivos foram alcançados.

VI. Selecionar estratégias de pesquisa

A partir das construções das perguntas ou conjecturas, que finalizaram o primeiro bloco de Romberg-Onuchic, são apresentadas, no segundo bloco, atividades: seleção de estratégias e procedimentos da pesquisa.

Nessa parte, Romberg (2007) aconselha a elaboração de uma estratégia geral, a qual se constituiu como a ideia central para o planejamento e desenvolvimento das ações necessárias para responder as perguntas, ou conjecturas, elaboradas anteriormente.

Esse planejamento deverá procurar responder à seguinte pergunta: "o que devo fazer" para responder às perguntas ou conjecturas levantadas? Para que a estratégia geral se consolide, são necessárias outras estratégias que auxilie a estratégia geral, essas outras estratégias são denominadas estratégias auxiliares.

VII. Selecionar procedimentos de pesquisa

Nesta etapa do segundo bloco, quando estabelecemos o que fazer para resolver o problema da pesquisa, surge outra indagação: "como fazer isso?" A resposta a essa pergunta é dada por meio da elaboração de um método que, em Romberg (2007), é chamado de procedimento geral, que precisa tomar forma e se reificar como método a ser aplicado. Da mesma forma, cada estratégia auxiliar demanda um método a ser implementado, denominado *procedimento auxiliar.* Ademais, para Onuchic e Noguti (2014), uma nova interpretação precisa ser acrescentada nesse momento, que é a de *colocar o procedimento geral em ação* e, para isso, é preciso também que cada procedimento auxiliar seja implementado.

VIII. Coletar evidências

No terceiro bloco do modelo Romberg-Onuchic, o pesquisador aplicará seu plano de ação para coletar as informações necessárias a fim de responder as perguntas da pesquisa. Essa coleta de evidências deve ser bem criteriosa, pois é o momento em que o pesquisador colocará o procedimento geral em ação, podendo aparecer muitas evidências, e nesse momento ele deve ter um olhar criterioso para selecionar evidências relevantes para sua pesquisa.

IX. Interpretar evidências

Nessa etapa do terceiro bloco, quando já foram coletas as evidências, é necessário que o pesquisador analise os dados coletados, visto que, nesse momento, é primordial o posicionamento do pesquisador sempre observando quais das evidências são importantes, frente ao problema levantado, interpretando os dados a fim de tirar as conclusões necessárias para sua pesquisa, ou seja, responder as questões da pesquisa.

De acordo com Romberg (2007), o pesquisador pode utilizar tanto métodos quantitativos aos quais se atribuem números às informações coletadas, quanto os métodos qualitativos, aqueles a que não se conseguem atribuir valores numéricos ou quantificá-los durante sua análise. Em quaisquer das duas situações mencionadas, o pesquisador deve estar atento às evidências que aparecerem durante a sua coleta e seleção, pois, segundo Romberg (2007) podem aparecer três tipos de evidências: relevantes, as irrelevantes e as não compreensíveis.

X. Relatar os resultados

Coletadas e interpretadas às evidências, o próximo passo, de acordo com Romberg (2007), deve ser o de escrever um relatório dos resultados obtidos. Esses resultados devem ser apresentados à comunidade de pesquisadores para que eles possam fazer suas críticas e apresentar contribuições relevantes sobre a pesquisa desenvolvida.

XI. Antecipar as ações dos outros

Finalmente, após perpassamos por todas as etapas propostas por Romberg (2007), os resultados gerados pelo desenvolvimento da pesquisa devem ser divulgados para a sociedade para assim lhes dar oportunidades de avaliar, criticar, sugerir modificar e fazer uso dos resultados para um trabalho futuro envolvendo o objeto de pesquisa.

2.2.2 A Presente Pesquisa no Modelo de Romberg-Onuchic

Neste momento, evidenciamos como a nossa pesquisa se configurou dentro do modelo metodológico de Romberg-Onuchic.

1. *Identificando o fenômeno de interesse*

Logo que terminei o ensino médio, comecei a cursar Matemática na Universidade Estadual de Goiás – UEG, na cidade Santa Helena de Goiás/GO. Naquela época, trabalhei como professor de apoio, acompanhando um aluno especial em regime de contrato temporário, e, também, ministrava algumas aulas de Física para 1º ano do Ensino Médio. Isso transcorreu durante alguns e, posteriormente, passei a ministrar a disciplina de Química também. No ano de 2010, surgiu uma oportunidade de trabalhar como professor de Matemática, na cidade de Quirinópolis – GO e, assim, tive que transferir, do curso de Matemática, para o polo da nova cidade, mesma universidade.

Meu interesse por esta pesquisa surgiu a partir de observações e reflexões ocorridas ao longo da minha atuação como docente na Educação Básica. Nesse período, pude perceber a dificuldade de compreensão dos conceitos de Logaritmos e Função de Logarítmica, pelos alunos, durante o processo de ensino e, principalmente, durante a resolução de atividades propostas nas aulas. Assim, diante disso, passou a haver, também, um sentimento crescente de ineficiência do ensino de matemática em nossas escolas, contudo, o aluno poderia ter prazer em descobrir, na matemática, os caminhos para se chegar à solução de um problema que lhe é proposto.

Desde então, começaram a surgir algumas inquietações relacionadas à aprendizagem dos alunos, durante as aulas de matemática que ministrava, e sempre questionava-me o que poderia fazer para melhorias em minha forma de ensinar, de maneira que ela fosse mais eficiente e significativa para a aprendizagem, e para a melhoria do processo de avaliação, dos meus alunos. Enfim, as minhas preocupações e reflexões, diante dos fatores expostos aqui, foram o que me fizeram estabelecer a temática desta pesquisa como prioridade em buscar desenvolver um trabalho capaz de promover melhorias para minha carreira profissional e, principalmente, fizesse com que meus alunos participassem ativamente do processo de ensino e aprendizagem e, assim, desenvolvessem um pensamento crítico, produtivo e, sobretudo, criativo. Isso deu origem ao meu fenômeno de interesse: "O Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas".

2. *Meu modelo preliminar*

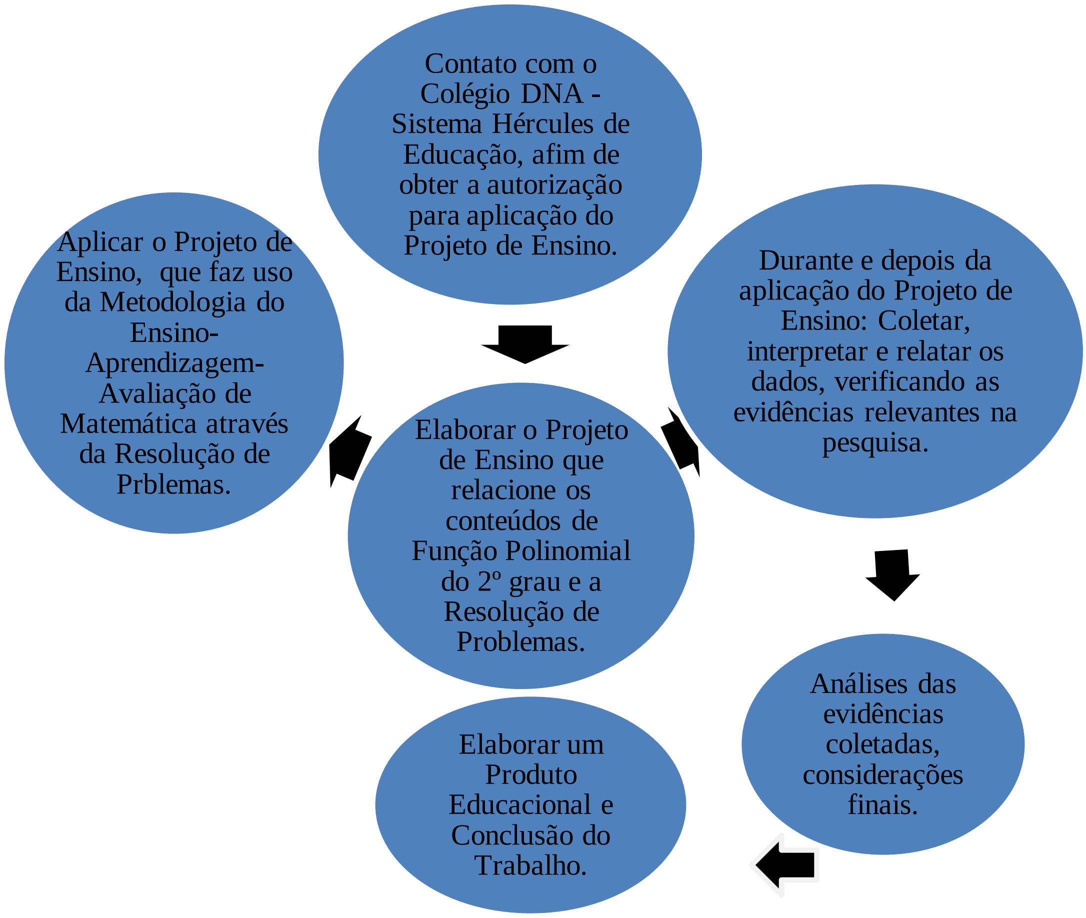
Esse modelo preliminar foi desenvolvido tendo como base meu fenômeno de interesse, tendo sido construído junto a um projeto de mestrado, submetido ao processo seletivo de 2017 no Instituto Federal de Goiás – IFG Câmpus de Jataí/GO, no qual pleiteei uma vaga no Programa de Pós-graduação em Educação para Ciências e Matemática (PPGECM).

Durante o decorrer do ano letivo, no programa de mestrado mencionado, a proposta inicial acabou sofrendo algumas alterações, por exemplo, no projeto inicial, foi proposto que esta pesquisa tivesse um plano de ensino implementado em uma escola da rede privada na cidade de Rio Verde/GO e os conteúdos a serem trabalhados, durante a aplicação do plano de ensino mencionado, seriam os de Função Polinomial do 2º grau.

Contudo, como o cronograma do programa e a carga horária das disciplinas cursadas no mestrado, foram intensos não foi possível iniciar a aplicação desse plano de ensino no primeiro semestre de 2018, pois precisaria passar pela a qualificação do projeto e, durante essa qualificação, foi sugerido por um dos membros da banca que seria interessante trabalhar no projeto um conteúdo que ainda não tivesse sido ministrado para a turma a ser investigada. Assim, como já estávamos terminando o primeiro semestre, os alunos já teriam visto o conteúdo de função quadrática, quando o projeto estivesse pronto para ser aplicado. Por esse motivo, achamos, eu e meu orientador, melhor mudarmos os conteúdos do projeto.

Baseado no modelo metodológico de Romberg-Onuchic idealizei minha pesquisa como um conjunto de ações em uma ordem pré-estabelecida, como é ilustrado pela Organograma 1.

Figura 3 - Modelo preliminar



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Após a definição para aplicar o projeto de ensino, no qual tínhamos escolhido uma turma do primeiro ano do ensino médio em uma escola particular na qual ministrava aulas, porém, foi sugerido pelo coordenador do programa que seria mais viável aplicar o projeto em uma escola pública. A partir dessa orientação, iniciei novamente a busca por uma escola onde seria implementado novamente o projeto de ensino para coleta de dados. Finalmente, passamos a nos dedicar à preparação do projeto de ensino para ser implementado em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual de Período Integral -CEPI - José Salviano Azevedo, localizado na cidade de Santa Helena de Goiás–GO.

Tendo por base nosso Fenômeno de Interesse, evidenciamos variáveis-chave para nossa pesquisa que demandou referenciais teóricos, pois, segundo Romberg (2007), é nesse momento que o pesquisador busca outros pesquisadores que já trabalharam ou desenvolveram pesquisas correlatas para solidificar seu conhecimento a respeito do tema a ser pesquisado. No tópico, a seguir, trataremos com mais detalhes essa questão.

3. *Relacionar com Ideias de outros*

Romberg (2007) salienta que ao “relacionar o fenômeno de interesse e o modelo às ideias de outros” o pesquisador pode buscar contribuições, ampliando e assim modificando o modelo preliminar. Sendo assim, esse seria o momento em que se deve realizar uma pesquisa bibliográfica de trabalhos já realizados para podermos apoiar nas ideias desses autores ou conceber novas ideias, a partir das reflexões do que os outros nos falaram.

Com base no fenômeno de interesse desta pesquisa e nas variáveis-chave relacionadas a ele, nessa investigação são identificamos dois grandes campos teóricos:

- ✓ Resolução de Problemas – quais as contribuições do ensino através da Resolução Problemas poderiam proporcionar para a construção de conhecimentos de logaritmos e função logarítmica, capaz de gerar situações em sala de aula que possibilitem a construção de novos conceitos e de conteúdos matemáticos.
- ✓ Logaritmos: origem e concepções – apresentaremos historicamente a importância desse conceito desde o século XV, fazendo uma descrição histórica sobre o aparecimento do logaritmo.

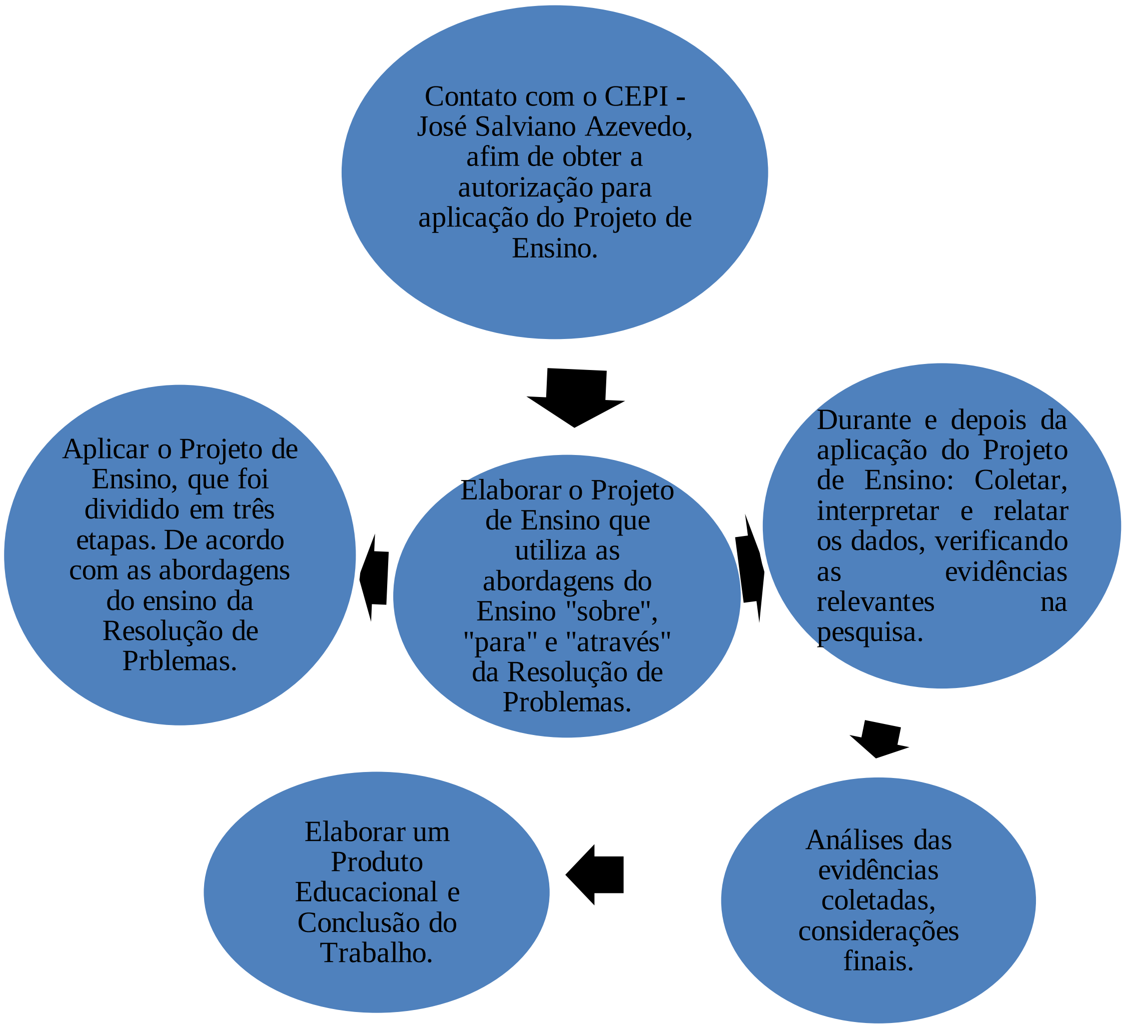
4. *O Modelo Modificado*

Após ouvir os outros, isto é, o nosso primeiro momento do “relacionar com ideias de outros”, terceira atividade do Modelo de Romberg-Onuchic, conseguimos esclarecer e definir melhor os rumos de nossa pesquisa. Sendo assim, nós a reformulamos e apresentamos, de acordo com os referenciais teóricos, o nosso Modelo Modificado, o qual nos guiará até o fim desta pesquisa.

Foi sugerido durante a qualificação do projeto que mudássemos o conteúdo a ser ministrado durante o desenvolvimento da pesquisa bem como o local que seria implementada a pesquisa. Tendo acatado essa sugestão, tivemos que reestruturar a pesquisa, voltando a fazer a visita na escola em que iríamos desenvolver a pesquisa.

Após “ouvir” os outros e a partir do modelo preliminar, surgiram novas ideias sobre os temas principais acerca do desenvolvimento da pesquisa, relacionados à nossa proposta inicial e análise detalhada do modelo preliminar o qual reestruturamos e construímos esse novo modelo, que denominamos modelo modificado.

Figura 4 – Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

No capítulo “Resolução de Problemas”, foi possível aprofundar nosso conhecimento em relação às mudanças ocorridas e sofridas no ensino de matemática e quais teorias a fundamentam sob a ótica da resolução de problemas, que culminaram no desenvolvimento da das abordagens de ensino “sobre”, “para” e “através” da Resolução de Problemas.

Ao pesquisar-se sobre Logaritmos e Função Logarítmica: origens e concepções, entendemos como se deu a construção dos conceitos, a necessidade de cálculos simplificados para o desenvolvimento e continuidade dos estudos pertinentes à mecânica, à engenharia, dentre outros. Por fim, estabelecemos uma ementa de acordo com o currículo Referência do Estado de Goiás, a qual a instituição de ensino utiliza, para trabalharmos durante a aplicação do projeto de ensino proposto.

Com isso, propomos um novo modelo de trabalho, que denominamos modelo modificado, no qual propus o Organograma 2, esse plano será detalhado no capítulo de estratégias e procedimentos.

5. *Perguntas ou conjecturas*

Para construção da nossa pergunta, durante a investigação e relação com ideias de outros pesquisadores, foi fundamental considerarmos os objetivos propostos para tornar possível responder à pergunta da pesquisa e dar consistência ao nosso estudo. Isso posto, esses foram os nossos objetivos:

- Realizar um aprofundamento teórico da literatura sobre Resolução de Problemas e sobre Logaritmos e Função Logarítmica;
- Compreender as potencialidades de um ensino através da Resolução de Problemas na construção de conhecimentos de conceitos relacionados aos Logaritmos e à Função Logarítmica;
- Desenvolver habilidades nos alunos para resolver problemas;
- Levar o aluno a construir conhecimentos dos conceitos relacionados a Logaritmos e à Função Logarítmica;
- Desenvolver a capacidade do aluno em aplicar seu conhecimento matemático para resolver problemas.

Um dos principais passos no processo de pesquisa segundo Romberg (2007) são as construções das perguntas, ou conjecturas levantadas quando se busca compreender um fenômeno em particular. E a nossa pergunta norteadora da pesquisa é: *"Como um Ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através Resolução de Problemas" poderia contribuir para a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e de função logarítmica?"*

6. *Selecionar estratégias e procedimentos de pesquisa*

Nesse tópico, buscamos selecionar as estratégias e procedimentos a fim de haver subsídios para responder à pergunta da pesquisa: *"Como um Ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através Resolução de Problemas" poderia contribuir para a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e de função logarítmica?"*, para isso foi preciso algumas estratégias e procedimentos desde a criação de um Projeto de Ensino cujo objetivo principal foi responder a nossa pergunta norteadora desta pesquisa. Estratégias essas que necessitaram de algumas estratégias auxiliares como a visita na unidade escolar, consultar ao Gestor Escolar, a Coordenação Pedagógica e ao Professor Regente para a escolha de uma turma para aplicarmos o Projeto de Pesquisa.

7. *Coletar e Interpretar evidências*

Para coleta e interpretação de evidências, elaboramos um projeto de ensino, como já foi mencionado, divido em três partes. Cada parte trata de uma das abordagens apresentadas por Schroeder e Lester (1989), sobre como a resolução de problemas se configura no contexto didático pedagógicos. Essas abordagens são: um ensino "sobre" Resolução de Problemas – que deverá desenvolver no estudante a capacidade de criar estratégias para resolver problemas de matemática; um ensino "através" da Resolução de Problemas – que deverá levar o estudante a construir conhecimentos de matemática a partir de problemas; e, um ensino "para" Resolução de Problemas – que seja capaz de levar o estudante conseguir aplicar o conhecimento matemático que ele aprendeu, tanto em problemas reais quanto em problemas teóricos.

Antecipamos que o plano de ensino foi aplicado em 15 encontros de uma hora e quarenta minutos cada. A coleta de evidências foi feita por meio gravações em mídias (áudios e vídeos), materiais desenvolvidos pelos alunos (atividade em sala e extraclasse) e um diário de campo pelo professor-pesquisador, no qual foram anotadas informações consideradas relevantes por ele.

8. *Relatar os resultados e antecipar as ações dos outros*

Este trabalho passou por duas qualificações, a primeira foi a do projeto de pesquisa o qual relatamos nossa pretensão sobre esta investigação e, nessa qualificação, ouvimos críticas e sugestões da comissão avaliadora, que ajudou a nortear nossos caminhos. A segunda foi sobre a nossa pesquisa já praticamente consolidada. Nesse momento recebemos, também, críticas e sugestões, de especialistas, sobre nossa análise de dados e nossa escrita da dissertação, e isso nos fez refletir sobre alguns pontos da nossa investigação e as contribuições que ajudaram a melhorar o nosso trabalho.

Nossa pesquisa; juntamente como o nosso produto educacional – uma sequência didática para auxiliar professores, da Educação Básica, a inovarem suas aulas de forma a envolver e motivar seus alunos, originada do nosso plano de ensino; reificada nesta dissertação, se configura, de acordo com Romberg (2007), como o nosso "Antecipar Ações de Outros", pois este trabalho poderá ser usado para promover ações de professores e também servir de base para novas pesquisas.

Depois de ouvir os outros e construir o Capítulo de Resolução de Problemas e de Logaritmos e suas concepções, nesse capítulo será retomado o modelo de Romberg.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, faremos uma incursão pelo histórico da Resolução de Problemas, depois apresentamos as três abordagens sobre uso da Resolução de Problemas em sala de aula, de acordo Schroeder e Lester (1989) e, por fim, faremos uma discussão para compreender algumas visões teóricas acerca da abordagem de ensino através da Resolução de Problemas, de acordo com Onuchic e Allevato (2011).

3.1 Aspectos Históricos da Resolução de Problemas

Segundo Morais e Onuchic (2014, p. 18), na passagem do século XIX para o XX, as teorias pedagógicas se desenvolveram ancoradas em teorias psicológicas, e as razões para essa evolução se justificam pela complexidade inerente à aprendizagem, ou não, em um contexto tão múltiplo como o da sala de aula.

A primeira das teorias em que a pedagogia se apoiou foi a Teoria da Disciplina Mental (TDM)[4]. Essa teoria entendia a mente humana a partir de uma detalhada hierarquia, isto é, uma coleção de faculdades ou capacidades dando pouca ênfase ao conteúdo a ser estudado. Com isso, acreditava-se que o importante era treinar e desenvolver as seguintes faculdades ou capacidades: percepção, memória, imaginação, compreensão e a intuição, ou razão.

No início do século XX, consoante aos estudos de Morais e Onuchic (2014), vigorava uma nova economia, o êxodo da sociedade agrária para industrial, exigindo que as pessoas soubessem mais matemática, aquela que pudesse ser usada no seu cotidiano. Nesse cenário de novas visões sobre o homem em dependência do conhecimento matemático, Lee Thorndike e Robert Sessions Woodworth, em 1902, no artigo[5] intitulado "A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função", buscaram verificar, experimentalmente, se o que era divulgado com a TDM de fato acontecia.

A pesquisa empreendida por eles apresentou elementos bem fundamentados que contradiziam a TDM, e, assim, provocaram uma mobilização entre matemáticos, psicólogos, estudiosos e adeptos ao ensino de matemática, tanto no que se referia à aceitação quanto ao questionamento da pesquisa.

---

[4]Foi desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wolff em 1740, quando essa teoria foi fundamentada.
[5] Nome original em inglês: *The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of the other function.*

Na tentativa de questionar a legitimidade da TDM, Morais e Onuchic (2014) salientam que, nos anos que se sucederam à pesquisa “A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função”, Thorndike direcionou esforços para o desenvolvimento de uma nova teoria psicológica que ficou conhecida como Conexionismo[6] a qual, contrariando a TDM, propunha que toda aprendizagem consiste de adição, eliminação e de organização de conexões que podem ser formadas, quebradas ou organizadas entre situações e respostas, ou seja, essa teoria se dá por meio de conexões entre estímulos e reações. A teoria do Conexionismo se fundamenta em três princípios, elucidados por Ferreira (2017, p.72):

> *Lei do efeito*: As reações que são seguidas por um estado recompensador de eventos vão ser fortalecidas e vão se tornar habituais para aquela situação;
> *Lei da prontidão*: Se o estímulo acontece no momento em que o indivíduo está pronto, isto é, a conexão está pronta para transmitir, então a transmissão é satisfatória, caso contrário a transmissão é perturbada;
> *Lei do exercício ou repetição*: quanto mais uma conexão for usada mais ela se fortalece e quanto menos ela for usada mais ela se enfraquece.

Essas três leis primárias, regentes da “Teoria do Conexionismo” de Thorndike, estabelecem que a aprendizagem resulte de conexões nervosas estabelecidas entre as impressões sensoriais e os impulsos para a ação.

Nas considerações de Morais e Onuchic (2014, p.19), Thorndike, apoiado na teoria conexionista, escreveu em 1921 o livro “Os Novos Métodos na Aritmética”[7], publicado no Brasil em 1936. Além de propor vários problemas matemáticos relacionados à aritmética da vida real, a obra estabelecia nesses novos métodos e questões evidenciando que não se deveria ensinar a aritmética pela aritmética, mas pela tentativa da busca caminhos para entender como as respostas a esses questionamentos se relacionam com a vida real.

Morais e Onuchic (2014, p. 22) salientam que, a partir da segunda metade da década de 1930 até aproximadamente o final da década de 1940, vigorou a Teoria Significativa apresentada em 1963 por David Paul Ausubel, quando publicou o livro *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (A Psicologia da Aprendizagem Verbal Significativa, em tradução), o qual apresenta e analisa a teoria da aprendizagem significativa, acreditando na ocorrência de influência do meio sobre o sujeito, pois, para ele aprender significativamente, é necessário ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e, com isso, ser capaz

[6] O nome original da teoria conexionista, em inglês, é *Connectionism Theory*.
[7]Obra original cujo título em lingual inglesa é *The New Methods in Arithmetic*.

de relacionar e acessar novos conteúdos. Nesse período, a Resolução de Problemas se constituiu como Teoria pelas mãos do matemático e pesquisador George Polya.

No final da década de 1980, Schroeder e Lester (1989), em seu artigo *Developing Under Standing in Mathematics via Problem Solving* (Desenvolvendo o entendimento em matemática via resolução de problemas, em tradução), afirmaram que existem três formas de utilizar a Resolução de Problemas em sala de aula: a primeira diz respeito ao ensino sobre resolução de problemas; a segunda versa acerca do ensino para a resolução de problemas e a terceira trata do ensino através da resolução de problemas.

3.2 Resolução de Problemas no Contexto Didático Pedagógico

Neste tópico faremos a apresentação das abordagens de ensino da Resolução de Problemas.

3.2.1 O ensino sobre Resolução de Problemas

Baseia-se no modelo de Polya (1995) no qual são estabelecidas estratégias e observadas às heurísticas de resolução de problemas, cujo foco é desenvolver habilidades nos estudantes para resolverem problemas. Para isso, Polya apresentou em seu livro *How to solve it*, traduzido para português como “A Arte de Resolver Problemas”, quatros passos considerados por ele primordiais para se chegar à solução de um problema. Primeiramente, é preciso compreender o problema; em um segundo momento, é necessário ver como os diversos itens estão inter-relacionados, a relação da incógnita aos dados, e assim ter ideia da resolução para só então estabelecer um plano. Na sequência, é importante executar o plano e, por último, fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Para resolver um problema, então, é interessante elaborar um plano de ação. Esse plano deve desencadear uma ou mais estratégias para a resolução do problema. Para desenvolver as heurísticas que desencadeiam a produção de estratégias para resolver certo problema, Ferreira, Pereira e Lemos (2018, p. 6) sugerem que se busque:

> I. *A Incógnita***:** O que se deve procurar; o que é que se quer determinar; do que é que se precisa para se chegar à solução;
> II. *Os Dados:* Informações úteis ou necessárias; valores; ou outros objetos relevantes para a resolução do problema;

> III. *Correlações:* De que se trata; qual a área de conhecimento; com que se parece; que relação existe com outro problema ou com outra situação já trabalhada;
> IV. *Conhecimentos específicos:* Conteúdos envolvidos; raciocínios necessários; procedimentos a serem realizados; conceitos essenciais etc.;
> V. *Representação:* Imagem mental ou escrita da correlação das informações apresentadas no problema; figuras, equações, inequações, funções etc. capazes de explicitar os dados do problema; e qualquer outra representação matemática e/ou simbólica dos dados que ajude no entendimento ou resolução do problema.

Agindo dessa forma, o professor levará o estudante a desenvolver habilidades e compreender as heurísticas envolvidas no trabalho em questão, ou seja, as operações mentais que possam ser úteis para resolver o problema e usá-las no desenvolvimento de suas habilidades, produzindo, consequentemente, estratégias de resolução do problema.

3.2.2 O ensino através da Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao se ensinar por intermédio da resolução de problemas, eles passam a ser valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio para construção de conhecimento, por meio da introdução de conceitos, de conteúdos ou de procedimentos, de forma a levar o estudante a conceber, e não apenas conhecer, as teorias apresentadas a ele.

Ensinar Matemática pela Resolução de Problemas consiste em uma abordagem corroborada com as recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)[8], e de orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de Matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2018).

> Para resolver problemas, os estudantes podem no início identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada (BRASIL, 2018, p. 536).

Com base nessas abordagens, em particular no ensino através da Resolução de Problemas, a Resolução de Problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino

[8] Singla em inglês que significa "Conselho Nacional de Professores de Matemática".

e tornou-se base da maioria das pesquisas do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP)[9].

De acordo com Onuchic (1999, p. 203), a "importância dada à Resolução de Problemas, no contexto da sala de aula de matemática, é recente e somente nas últimas décadas é que educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção". A partir daí muitas discussões e pesquisas sobre o tema Resolução de Problemas ocorreram, principalmente, nos Estados Unidos. Atualmente, a preocupação com resolução de problemas vem ocupando cada vez mais um lugar importante nos currículos escolares, graças aos esforços de muitos matemáticos, educadores matemáticos, pesquisadores e grupos de pesquisa consolidados.

No Brasil, os estudos sobre a Resolução de Problemas foram iniciados na segunda metade da década de 1980, sendo que, até o final de 1990, apenas oito trabalhos de dissertação, ou tese, sobre esse tema puderam ser encontrados.

Ferreira, Silva e Martins (2017) observaram, nos resultados de sua pesquisa sobre o uso da Resolução de Problemas no Ensino Superior, que, dos trabalhos publicados dos dois principais grupos de pesquisas em Resolução de Problemas no Brasil: o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) e o Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM)[10]: cerca de 61,5% teve como foco os conteúdos da Educação Básica, buscando revisar os conteúdos de matemática elementar, para recuperar alunos com dificuldades nesses conteúdos; e apenas 38,5% utilizaram resolução de problemas para trabalhar conteúdo da matemática superior, ou seja, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra do Ensino Superior, etc.

Enfim, a Resolução de Problemas, inserida num ambiente propício e favorável, como tem mostrado as pesquisas e os trabalhos desenvolvidos e com esta dissertação não foi diferente, constatamos que há resultados satisfatórios para o ensino de Matemática.

Utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode-se levar o aluno a verificar a validade dos conceitos matemáticos, realizar conjecturas, relacionar tais conceitos com situações do seu cotidiano,

---

[9] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP). Esse grupo é coordenado pela Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, e desenvolve suas atividades no Departamento de Educação Matemática da UNESP – Rio Claro/SP.

[10] A sigla GPEAEM significa "Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática". O grupo é coordenado pela Professora Doutora Norma Suely Gomes Allevato, que desenvolve seus trabalhos junto ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Cruzeiro do Sul, em São Paulo-SP.

generalizar casos particulares observados por ele, utilizar procedimentos num contexto significativo, ter uma atitude reflexiva e desenvolver a capacidade de raciocinar e de pensar matematicamente (ALLEVATO E ONUCHIC, 2014).

3.2.3 O ensino para Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao ensinar na abordagen "*para"*, o professor se concentra na maneira como a matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros ou não. Embora a aquisição de conhecimentos seja importante, o essencial é que o aluno seja capaz de utilizá-la. Em encontro com Shroeder e Lester, Ferreira et al (2018, p. 6) salientam que:

> Ao ensinar nessa abordagem, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e suas propriedades, os principais teoremas, às vezes são enunciados de maneira simplificada e sem demonstração. Após isso, coloca vários exemplos tentando abranger a maior quantidade de situações possíveis para que o aluno seja capaz de resolver qualquer problema do referido assunto. O professor que utiliza essa abordagem não está preocupado em desenvolver as habilidades matemáticas do aluno. Ele almeja apenas que o aluno seja capaz de reproduzir o que já foi feito e adaptar tais conhecimentos para o maior número possível de situações. E, ao fazer a avaliação do conteúdo ensinado, o professor cobra a reprodução, repetindo exercícios praticados em sala de aula e, muitas vezes, nem mesmo altera os dados.

Como apresentadas acima estão algumas considerações sobre a resolução de problemas utilizando a abordagem "para", é interessante entender também a diferença entre problema e exercício.

Para Dante (2003 p. 20), "exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. Já um problema é a descrição de uma situação onde procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução".

Nesse contexto, Dante (2003) classifica os exercícios em dois tipos, e os problemas, em quatro, evidenciando fortemente o ensino na abordagem "*para*" Resolução de Problemas.

Exercícios do tipo de Reconhecimento: o objetivo é que o aluno reconheça, identifique ou tenha um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc.

Exercícios de algoritmos: são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo, tendo o objetivo de treinar a habilidade de execução de regras, e podem também reforçar conhecimentos adquiridos anteriormente.

Ainda segundo Dante (2003 p. 20), os problemas são classificados da seguinte maneira:

Problemas-padrão: envolvem a aplicação direta de um ou mais algoritmos e não exigem nenhuma estratégia, pois, tem como tarefa básica transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-los.

Problemas-processo ou heurísticos: a resolução envolve operações que não estão contidas no enunciado, exigindo dos alunos um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, aguçando a curiosidade, permitindo o desenvolvimento da criatividade e o espírito explorador.

Problemas de aplicação: esses retratam situações reais do cotidiano, exigindo o uso da matemática para resolvê-los, usualmente chamados de situações-problema.

Problemas de quebra-cabeça: geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade de perceber algum truque, que é a chave da solução.

Van de Walle (2001) apud Onuchic e Allevato (2011, p. 81), acredita que “um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para o qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”.

Onuchic e Allevato (2011, p. 81), por sua vez, afirmam que problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”.

Como referenciamos, o sucesso de um trabalho baseado na resolução de problemas depende sem dúvida do professor, cabendo-lhe preparar os alunos para as atividades, saber diagnosticar o nível de conhecimento, as habilidades e, assim, envolvê-los nos exercícios ou problemas propostos.

Destarte, com as pesquisas já realizadas envolvendo a Resolução de Problemas, fica evidenciada a sua inquestionável importância para a formação escolar em todos os níveis de ensino, promovendo uma aprendizagem significativa e efetiva.

3.3 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas foi desenvolvida em um processo de estudos e de pesquisas realizadas pelo GTERP, grupo de trabalho vinculado ao Programa de Pós-Graduação da UNESP, Rio Claro-SP.

Os trabalhos desenvolvidos pelo grupo os levaram a construir e a fundamentar uma metodologia de ensino denominada “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”. Essa metodologia foi idealizada e implementada inicialmente pela professora e pesquisadora Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, e, ao longo do tempo, vem sendo usada em trabalhos de mestrado e de doutorado desse e de outros grupos.

O termo Ensino-Aprendizagem-Avaliação pode causar estranheza devido à composição das três palavras: ensino, aprendizagem e avaliação. Contudo, Allevato e Onuchic (2014) salientam que:

> Embora ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática se constituam em elementos distintos, que não ocorrem necessariamente ao mesmo tempo ou como decorrência um do outro, o que se considera ideal é que ensino e aprendizagem se realizem, sim, integrados nas situações de sala de aula; com esse sentido é que, não raro, se emprega a expressão ensino-aprendizagem. Ocorre que, mais recentemente, também o conceito de avaliação começou a ser repensado e, a partir da compreensão da necessidade de adotar princípios de avaliação contínua e formativa, ela passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos. Kilpatrick e Silver (2000) apontam a avaliação como um dos elementos de destaque entre os desafios para os educadores matemáticos contemporâneos, recomendando que ela deva configurar-se como uma oportunidade para aprender (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.42).

Allevato e Onuchic, por sua vez, explicam essa composição:

> A palavra composta “Ensino-Aprendizagem-Avaliação” tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador. Desse modo, nessa Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, a avaliação é realizada durante a resolução de problemas, “integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 43).

Van de Walle (2001) apud Allevato e Onuchic (2014, p. 43) aponta alguns componentes básicos que os professores de Matemática devem envolver em seu trabalho, entre os quais destacam a habilidade de planejar e de selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas, e a habilidade de integrar a avaliação ao processo para aumentar a aprendizagem e aprimorar, no dia a dia, o ensino.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática pela Resolução de Problemas estabelece que o ponto de partida deve ser um problema, denominado Problema Gerador. A característica principal dessa metodologia é a de que o professor deverá deixar de ser o centro das atenções, passando para o aluno a responsabilidade pela construção de seu conhecimento.

Onuchic e Allevato (2011, p. 83) sugerem o seguinte roteiro de atividades:

> 1. Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que, sempre que possível, o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
> 2. Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
> 3. Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. • Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema. • Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, até consultar um dicionário.
> 4. Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
> 5. Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
>
> •O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos, estratégias) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
>
> 6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

> 7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
> 8. Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> 9. Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Contudo Allevato e Onuchic (2014, p. 46) salientam que essa etapa teria forte viés do ensino para a resolução de problemas, contudo, isso não desconfigura a metodologia porque essa concepção (através) inclui as demais (sobre e para).

Van de Walle (2001) apud Allevato e Onuchic (2014, p. 47) defende que a resolução de problemas deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática. Observa-se, assim, que o crescimento dos alunos continua durante a resolução de problemas, nesse sentido, a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois, nessa metodologia, o professor tem oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo. Ademais, os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas.

4 LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA: ORIGEM E CONCEPÇÕES

Neste capítulo, discutiremos a teoria relacionada a Logaritmos e às Funções Logarítmicas, fazendo um percurso histórico desde sua origem até as conceituações e importância de seu ensino.

4.1 Logaritmos: suas Origens e Concepções

Os babilônios, segundo Boyer (2012), viveram no vale mesopotâmico no quarto milênio antes de Cristo. Era uma população de alto nível cultural que utilizava o sistema de base sexagesimal, unidades de tempo e fazia medida dos ângulos. Seu maior trunfo para a civilização moderna foi a utilização de uma notação que versava sobre os números inteiros quanto aos racionais. Entre as tabelas babilônicas, encontram-se algumas contendo potências sucessivas de numerais semelhantes à tabela de logaritmos, ou mais propriamente de antilogaritmos, equivalente à construída por Jhon Napier (1550 – 1617).

Pecorari (2013) salienta que a origem dos logaritmos remonta aos estudos de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) referentes às sucessões aritméticas e geométricas sobre a sucessão de potências de um número dado, as mesmas mencionadas nas tábuas ou tabelas babilônicas. Séculos depois, durante a transição do Renascimento para a Modernidade até o início do século XVI, a comparação entre potências de sucessões reaparece no trabalho do matemático alemão Miguel Stifel (1487 – 1567).

No final do século XVI, com o avanço nos estudos da Astronomia e da Navegação, cada vez mais se faziam necessários os usos dos cálculos aritméticos muito complexos, embora o uso das frações decimais, em substituição às sexagesimais, viessem facilitar os cálculos de multiplicações, divisões, potenciação e extração de raízes, pois eram consideradas tarefas extremamente complexas.

Todas essas operações eram realizadas com base nos senos e só mudaram, conforme Eves (2008), perto do início do século XVII, quando Napier publicou sua pesquisa sobre os logaritmos, transformando operações trabalhosas de efetuar em operações práticas, por meio de tabelas que permitissem voltar aos cálculos iniciais.

John Napier (1550 – 1617), de acordo com Eves (2008), nasceu quando o pai tinha apenas 16 anos de idade, tendo vivido a maior parte de sua vida na majestosa propriedade da família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, Escócia, e gastou grande parte de suas energias em controvérsias políticas e religiosas de seu tempo.

Não era matemático profissional, possuía terras na Escócia, era um ativista religioso, habilidoso na Engenharia Mecânica e preocupado com questões militares. Na Matemática, seu interesse maior eram cálculos numéricos e trigonometria para ajudar em seus projetos mecânicos. Essa preocupação fica evidente em um trecho de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) de 1614, a qual continha uma tábua que fornece logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arcos.

Consoante a Eves (2008), as produções de Napier geraram quatro produtos, trabalho que entrou para a história da matemática, conforme indicado a seguir:

> (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números (EVES, 2008, p. 342).

Os logaritmos oferecem uma maneira rápida de efetuar grandes divisões e multiplicações, baseando-se no princípio de que, para multiplicar potências, podem-se somar seus expoentes. Ademais, o desenvolvimento dos logaritmos tornou possível muitas outras atividades, como a astronomia, a engenharia, entre outras.

Como se sabe hoje, o poder dos logaritmos como instrumento de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e de subtração. A fórmula trigonométrica bem conhecida na época de Napier, a tábua das funções trigonométricas, a qual existia desde o século II, apresentadas por Cláudio Ptolomeu, permitiam realizar produtos através de somas, e é exemplo de como os matemáticos contornavam esses problemas. Nesse sentido, o meio utilizado para transformar produto em soma pode ser escrito segundo a igualdade trigonométrica:

$$2cos.A.cos.B = cos\,(A+B) + \ cos\,(A-B)$$

Essa igualdade deu origem às seguintes identidades trigonométricas:

I. $2sen.A.cos.B = sen\,(A+B) + sen\,(A-B)$
II. $2cos.A.sen.B = sen\,(A+B) - \ sen\,(A-B)$
III. $2sen.A.sen.B = cos\,(A-B) - \ cos\,(A+B)$

Essas identidades são, às vezes, conhecidas como fórmulas de Wener, pois, ao que parece, o alemão Johannes Wener (1468 – 1528) as usou para simplificar cálculos envolvendo astronomia. Tais fórmulas passaram a ser largamente usadas por matemáticos e astrônomos perto do fim do século XVII como um método de conversão de produtos em somas e diferenças. O método se tornou conhecido como *prostaférese,* a partir do grego "prosthesis" e "apharesis" que significam respectivamente "adição e subtração".

Consonante às pesquisas de Napier, de acordo Eves (2008, p. 343), o pesquisador estava inteirado do método da *prostaférese* e deixou-se influenciar por ele, visto que, se utilizasse outra forma, haveria bastante complexidade para ser explicada, restringindo seus logaritmos, inicialmente, aos senos de ângulos. Entretanto, na abordagem de Napier, para eliminar as complexas e longas multiplicações e divisões, ele deixava de utilizar o método da *prostaférese* e se baseava na associação dos termos de uma progressão aritmética e geométrica. Isso serviu de base para o desenvolvimento de sua maior invenção: o conceito de logaritmo.

A ideia de Napier pode ser reformulada, hoje, da seguinte forma:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024	2.048	4.096	8.192	...

Os termos de uma progressão geométrica: b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ... aos da progressão aritmética 1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ..., da seguinte forma: o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, ou seja, a cada dois termos, b^m e b^n , da primeira progressão, são associados à soma m + n dois termos da segunda progressão. Ao tentar manter os termos da progressão suficientemente próximos, de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, surgia o problema de que essa tabela permitia somente um número restrito de multiplicações e divisões; e, para resolver isso, Napier utilizou *b* bem próximo de 1, cujas potências crescem lentamente, oferecendo uma grande quantidade de produtos e quocientes. Para isso, Napier tomou $(1 - 1/10^7) = 0{,}9999999$ para *b*. Assim: $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$. Para algum L, então ele chamava L de "logaritmo" do número N.

Observe-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0, pois $10^7(1 - 1/10^7) = 0{,}999...$ é 1. Baseado nessa construção, dividindo-se N e L por 10^7, pode-se imaginar um sistema de logaritmos na base 1/*e*, pois

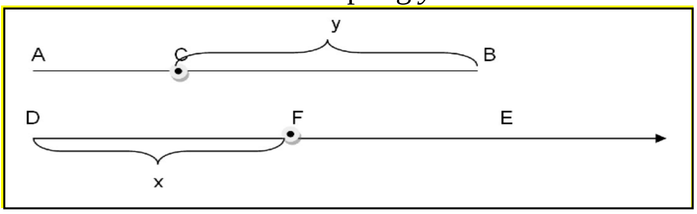
$$(1 - 1/10^7)^{10^{\wedge}7} \approx \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1/e. \; (1)$$

Entretanto, Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos.

Eves (2008, p. 344) salienta que Napier dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria, tendo finalmente explanado os princípios de seu trabalho em termos geométricos. Considere-se um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma semi-reta $\overline{DE}$, de origem D, conforme a figura 1. Suponha-se que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admita-se que se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância $\overline{CB}$, e que F se mova com movimento uniforme. Napier definiu então $\overline{DF}$ como o logaritmo de $\overline{CB}$. Isso é, pondo $\overline{DF}$ = *x* e $\overline{CB}$ = *y*.

Figura 5 – Segmento de Reta e Semirreta Auxiliar para a Geometria dos Logaritmos de Napier

x = Nap log *y*



Fonte: Eves (2008, p. 344).

Como relata Eves (2008), Napier tomou o comprimento de $\overline{AB}$ como 10^7, pois as melhores tábuas de senos de que dispunha àquela época se estendiam até sete casas. A partir da definição de Napier e através do uso de conhecimentos com que Napier não contava, chegou-se:

$$Nap \log \mathrm{y} = 10^7 \log {}^1\!/_e \left(\frac{y}{10^7}\right)$$

Desse modo, a afirmação feita frequentemente de que os logaritmos neperianos são logaritmos naturais não corresponde de fato à verdade. Observe-se que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, ao contrário do que ocorre com os logaritmos naturais.

Nota-se, ademais, que, sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, *y* decresce em progressão *geométrica* enquanto *x* cresce em progressão *aritmética*. Assim, verifica-se o princípio fundamental de um sistema de logaritmos, a associação de uma progressão geométrica a uma aritmética. Daí que, por exemplo, se *a/b = c/d, então*

$$Nap \log a - Nap \log b \ = Nap\ Log\ c - Nap \log d,$$

que é um dos muitos resultados estabelecidos por Napier.

Prova-se esse resultado com um pouco de cálculo. Conforme Eves (2008), como $\overline{AB}$ = 10^7 então $\overline{AC}$ = 10^7 – y e daí velocidade de C = - $\frac{dy}{dt} = y$. Isso é, $\frac{dy}{y} = -dt$ ou, integrando, $\ln y = -t + C$. Calculando-se a constante de integração para (t = 0), obtém-se $C = \ln 10^7$ e, portanto:

$$\ln y = -t + \ln 10^7.$$

Por outro lado, pode-se observar que a velocidade de $f = \frac{dy}{dt} = 10^7$, de modo que $x = 10^7 t$. Assim, tem-se:

$$Nap \log y = x\ 10^7 t = 10^7\ (ln 10^7 - \ln y)$$
$$= 10^7 \ln(\frac{10^7}{y}) = 10^7 log\ ^1/_e\ (^y/_{10^7}).$$

Segundo salienta Eves (2008), Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). A *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que, no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria do *Gresham College* de Londres e posteriormente professor de Oxford, viajou até Edimburgo para dar tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Foi durante esse encontro memorável que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou *comuns*, os logaritmos dos dias de hoje.

Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal.

De acordo com Eves (2008), os termos utilizados foram conceituados da seguinte forma: a palavra *logaritmo* significa "número de razão" e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*.

Briggs introduziu a palavra *mantissa*, que é um termo latino de origem etrusca que significa inicialmente "adição" ou "contrapeso" e que, no século XVI, passou a significar "apêndice". Já o termo "característica", também segundo Eves (2008), foi sugerido por Briggs e usado por Vlacq. Eves (2008) também assevera que, desde as primeiras tábuas de logaritmos comuns, costumavam-se trazer impressas tanto a característica como a mantissa; e, só no século XVIII, começou a praxe atual de só se imprimir a mantissa.

A invenção de Napier foi adotada por toda a Europa e pela astronomia, em particular. Segundo Eves (2008), Laplace afirmou sobre a invenção dos logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos". Vários adeptos dos logaritmos começaram a divulgá-los pela Europa, como por exemplo, Bonaventura Cavalieri, o qual se empenhou em divulgar os logaritmos na Itália; Johannn Kepler, na Alemanha; Edmund Wingate, na França, entre outros.

Pode-se acrescentar ainda que, segundo Eves (2008), Napier alega que teve um rival quanto à prioridade da invenção dos logaritmos, o suíço Jobst Bürgi (1552 – 1632), um construtor de instrumentos que concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independentemente de Napier e publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier anunciar sua descoberta ao mundo. Embora os dois tenham concebido a ideia dos logaritmos muito antes de publicá-las, acredita-se geralmente que Napier teve a ideia primeiro. Todavia, enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica. Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente. Assim, se $n = b^x$, diz-se que x é o logaritmo de n na base b. Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes.

Diante disso, uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes.

4.2 Funções Logarítmicas e a Importância de seu Ensino no Ensino Médio

Para início de discussão acerca da aplicabilidade desses estudos no ensino médio, duas indagações se fazem oportunas: o que gerou o nosso modelo modificado? E por que estudar logaritmos e funções logarítmicas?

Conforme se relatou anteriormente, o desenvolvimento de logaritmos do século XVI com as publicações de Napier (1615) e de Bürgi (1620), dentre outros estudiosos, tiveram o intuito de facilitar complexos cálculos em um momento que não existiam calculadoras e computadores. Nesse sentido, foi valiosa a publicação das tábuas de logaritmos em 1620 por Edmund Gunter, usadas para fazer multiplicações, divisões, extração de raízes de números decimais dentre outras utilidades práticas.

Com todo o aparato tecnológico que o século XXI vem proporcionando, como, por exemplo, *softwares* e aplicativos desenvolvidos para impulsionar a aprendizagem dos estudantes, às vezes cabem a pergunta: por que o professor teria ou precisa ensinar logaritmos ou função logarítmica?

Com essas indagações, reformulamos nossa pesquisa e elaboramos o modelo modificado que sugerimos e tratamos com mais afinco nos capítulos I e IV deste trabalho. Trataremos nessa segunda etapa deste capítulo sobre a importância do ensino da função logarítmica e o que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC - 2018).

Os logaritmos surgem da necessidade de tornar mais simples as operações de multiplicações, divisões, potenciações e radiações, pois, no fim do século XVI, com o desenvolvimento da navegação e da astronomia, era imprescindível que as operações fossem realizadas cada vez mais rápidas e eficientes. Todavia, com o surgimento da calculadora, a utilização das tábuas logarítmicas, entrou cada vez mais em desuso, porém o ensino de funções logarítmicas é extremamente importante na matemática principalmente para conhecer suas aplicações em diversas situações e áreas do conhecimento principalmente na Ciências da Natureza como ressalta a BNCC:

> [...] sugere algumas habilidades para ensino de logaritmos e funções logarítmica, que o aluno consiga, resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contexto como os de abalos sísmicos, Ph, radioatividade, matemática financeira entre outros (BNCC, 2018, p. 528).

A BNCC (2018) salienta que a matemática e suas tecnologias no Ensino Médio devem utilizar-se de conceitos, de procedimentos e de estratégias capazes de levarem o estudante a não apenas resolver problemas, mas também formular, descrever dados, selecionar modelos matemáticos para o desenvolvimento do pensamento computacional, por meio da utilização de diversos recursos da área.

Após buscarmos compreender as potencialidades do ensino de logaritmos e função logarítmica e o que a BNCC ressalta e orienta a nós, profissionais da área de Matemática e suas Tecnologias, torna-se possível possibilitar aos nossos estudantes uma participação ativa no processo de Ensino, Aprendizagem e Avaliação reforçando a capacidade de raciocinar, formular e testar conjecturas, avaliando e construindo argumentações.

Pautado nas sugestões dos nossos referenciais teóricos, então, fomos entender o Teorema da Caracterização[11] da função logarítmica:

Seja f: $IR^+ \rightarrow IR$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in IR+$. Então, existe a > 0 tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in IR^+$.

Demonstração:

Seja f uma função crescente, outro caso é tratado da mesma maneira, tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$.

Tem-se:

$f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$, e como f é crescente devemos ter $f(2) = b > 0$.

Seja g: $IR^* \rightarrow IR$ uma nova função tal que $g(x) = \frac{f(x)}{b}$, crescente, que transforma produtos em somas. Tem-se:

[11] O Teorema da Caracterização pode ser encontrado no livro "A matemática do Ensino Médio, vol. I" de Elon Lages Lima e outros (1998, p. 194) publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

$i)\ g(2) = \dfrac{f(2)}{b} = 1$

$ii)\ para\ todo\ m \in N, g(2^m) = g(2 * 2 * 2 * * * 2) = \ g(2) + \ g(2) + \ ... g(2) = m$

$iii)\ se\ r = \frac{m}{n}, m\ \in Z, n\ \in Z^*$ então $m = r.n.$

$m = g(2^m) = \ g(2^{r.n}) = g((2^r)^n = n. g(2^r) \Rightarrow g(2^r) = \ \frac{m}{n}.$

$iv)\ se\ x \in R$ é $irracional\ então, para\ r, s, racionais\ tem - se$:

$r < x < s\ \Rightarrow\ 2^r\ < 2^x < 2^s\ \Rightarrow g(2^r) < g(2^x) < g(2^s) = r < g(2^x) < s.$

Assim, todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $g(2^x)$ e todo número racional *s* maior do que x é também maior do $g(2^x)$. Segue-se que $g(2^x) = x$ para todo x $\in$ R. Portanto, $g(y) = \log 2\ y$ para todo $y > 0$.

Então para x> 0, tem-se:

$x = 2^{g(x)} = \ 2^{\frac{f(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{f(x)} = \ a^{f(x)}$, com $a = 2^{\frac{1}{b}}$, logo $f(x) = log_a$ x.

Portanto, saliente-se que os estudantes devem correlacionar a ideia de função logarítmica primeiro como a inversa da função exponencial, e também como salienta a BNCC, compreender fenômenos naturais tornando sua capacidade e análise sobre as mais diversas situações do cotidiano.

5 ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS

Apresentamos neste capítulo o segundo bloco de estudos de Romberg-Onuchic, o qual traremos as Estratégias e Procedimentos da Pesquisa bem como a forma com que colocamos os Procedimentos Auxiliares em Ação.

5.1 Estratégias e Procedimentos da Pesquisa

Para responder à pergunta do problema de pesquisa proposta, foi preciso que elaborássemos um Projeto de Ensino. Esse projeto se encontra fundamentado no Modelo Modificado e devia contemplar itens que nele aparecem. Para contemplar o seu segundo bloco do modelo de Romberg-Onuchic, atividades cinco e seis, no qual o pesquisador deve, antes de colocar seu projeto em ação, planejar as estratégias e os procedimentos necessários para que se obtenha sucesso na realização de seu trabalho.

Desse modo, descreveremos nossas estratégias e procedimentos adotados na condução desta pesquisa, contudo, primeiramente, cabe retomar a pergunta da pesquisa: *"Como um Ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através Resolução de Problemas" poderia contribuir para a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e de função logarítmica?"*

Considerando nosso fenômeno de interesse, o Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa, elaboramos o plano de ação baseado nas seguintes estratégias:

Estratégias Gerais (EG): Criar um Projeto de Ensino para o primeiro ano do Ensino Médio, utilizando as abordagens de ensino "sobre", "para" e "através" em Resolução de Problemas visando responder à pergunta da pesquisa.

Estratégias Auxiliares (EA): E_1: Planejar uma visita ao Colégio Estadual José Salviano Azevedo, no município de Santa Helena de Goiás – GO.

E_2: Consultar a direção, a coordenação pedagógica e o professor regente sobre o projeto de pesquisa "O Ensino de Logaritmos e de Função Logarítmica utilizando as abordagens de ensino "sobre", "para" e "através" de Resolução de Problemas", questionando a possibilidade de atuar como 'Professor-Pesquisador' no referido projeto.

E_3: Elaborar o Projeto de Pesquisa "O Ensino de Logaritmos e Função Logarítmica utilizando as três abordagens de ensino da Resolução de Problemas".

E_4: Selecionar a turma participante do Projeto de Ensino dentre todas as turmas de primeiro ano do Colégio em consonância com a disponibilidade da turma e de acordo com a professora-colaboradora.

E_5: Elaborar o Termo de Compromisso e Responsabilidade, Consentimento de Participação do aluno como sujeito da pesquisa e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE para pais e para o Professor-Pesquisador.

E_6: Execução do roteiro de atividades.

E_7: Analisar os resultados e proceder às conclusões.

Para as estratégias, geral e auxiliares, trabalhamos os respectivos procedimentos descritos a seguir.

Procedimento Geral (PG): Criação do Projeto de Ensino para o desenvolvimento da pesquisa utilizando as abordagens de ensino através da Resolução de Problemas visando responder ao problema da pesquisa.

Procedimentos Auxiliares (PA): P_1: Visita ao Colégio Estadual José Salviano Azevedo, em Santa Helena de Goiás-GO.

P_2: Reunião com a direção e com a coordenação pedagógica.

P_3: Reunião com o professor-colaborador.

P_4: Elaboração do roteiro de atividades para do projeto de pesquisa "O Ensino de Logaritmos e Função Logarítmica utilizando as três abordagens de ensino da Resolução de Problemas".

P_5: Elaboração do Termo de Compromisso e Responsabilidade, Consentimento de Participação do aluno como sujeito da pesquisa e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE.

P_6: Execução do roteiro de atividades pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

P_7: Proceder à análise dos resultados e às conclusões.

5.2 Procedimentos Auxiliares em Ação

Para atingirmos o Procedimento Geral, foi criado o Projeto de Ensino denominado "O Ensino de Logaritmos e Função Logarítmica utilizando as abordagens de ensino através da Resolução de Problemas" estabelecemos antes os procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e P_7, os quais foram descritos no tópico anterior. A seguir, mostraremos como esses procedimentos foram colocados em ação, por meio dos respectivos itens 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4, 5.2.5 e 5.3.6.

5.2.1 A Visita ao Colégio Estadual José Salviano Azevedo, em Santa Helena de Goiás

Quando foi proposto pelo coordenador que o Projeto de Ensino seria desenvolvido em uma instituição pública, tivemos que analisar e repensar em qual instituição seria viável a condução do projeto de pesquisa. Optamos pelo CEPI – José Salviano Azevedo localizado na cidade de Santa Helena de Goiás, visto que o Professor-Pesquisador já ter trabalhado na referida instituição no ano de 2015.

Inicialmente, o pesquisador apresentou à direção e à coordenação pedagógica do CEPI – José Salviano Azevedo o projeto de pesquisa, buscando entender como funcionava a instituição, a carga horária semanal e a disponibilidade de haver outros encontros para esclarecimentos e acertos alguns pontos para o desenvolvimento da pesquisa informando sobre as formas legais de sua aplicação. Esse momento de ambientação foi importante para a determinação do referido colégio como campo de pesquisa.

5.2.2 Reunião com a Direção e com a Coordenação Pedagógica

Após apresentar o projeto de pesquisa preparado à coordenação pedagógica, o pesquisador foi em busca de compreender a rotina da escola e dos alunos. Como esse modelo de escola de tempo integral ainda estava em fase de implantação e testagem, foi necessário que verificássemos como se dava o cotidiano de todos os agentes escolares e algumas questões pedagógicas e técnicas a fim de viabilizar a condução do projeto de pesquisa. Nesse encontro, tanto a diretora quanto a coordenadora pedagógica deram total apoio à aplicação da pesquisa e concordaram com o pedido do pesquisador para o desenvolvimento da pesquisa durante os meses de setembro e de outubro de 2018, totalizando 15 encontros, nesse caso, 30 horas/aula.

5.2.3 Reunião com a Professora-Regente

Para obter a autorização e a colaboração da professora-regente, foram feitas quatro reuniões sobre a proposta de trabalho e como ocorreria o desenvolvimento da pesquisa, tornando-se possível colocarmos em prática a aplicação da pesquisa. Ficou acordado que o projeto de pesquisa deveria contar com a colaboração da professora da disciplina, a qual designaremos como Professora-Colaboradora.

Na primeira reunião, foi apresentada a proposta da pesquisa e o pedido de autorização bem como sua colaboração durante aplicação da pesquisa, ficando acordado que o Professor-Pesquisador assumiria praticamente a totalidade da disciplina de matemática como papel de professor da disciplina, porém contando com o auxílio da professora-colaboradora durante a aplicação do Projeto de Pesquisa. A professora da disciplina apoiou a aplicação e se colocou à disposição durante todo o decorrer do processo.

A segunda reunião teve o propósito verificar horário de aula e disponibilidade das turmas, pois não poderíamos comprometer o andamento das aulas durante aplicação da pesquisa. O projeto de pesquisa deve ser ministrado com um mínimo de 30 aulas de 50 minutos, distribuídas em três encontros semanais, totalizando 15 encontros de 100 minutos. A ementa do projeto foi estabelecida de acordo com o Currículo Referência Preliminar de 2012.

No terceiro e no quarto encontro com a professora-colaboradora, foi lido e analisado o projeto de pesquisa, esclarecendo-se como procederíamos durante sua a aplicação e quais atividades seriam desenvolvidas pelos alunos na sala aula.

5.2.4 Criação do Projeto de "O Ensino de Logaritmos e de Função Logarítmica utilizando as abordagens de ensino “sobre”, “para” e “através” de Resolução de Problemas”

A Elaboração do Projeto de Ensino desenvolvido está apresentado na íntegra no Apêndice A deste trabalho. Para cada atividade proposta nos encontros, descrevemos os objetivos do encontro, os conteúdos a serem trabalhados e objetivos pretendidos em cada problema. Mostramos as estratégias pensadas pelo professor, apresentamos também a formalização e as atividades que os estudantes irão resolver extra-classe.

O Projeto de Ensino foi divido em três etapas: um ensino “sobre” Resolução de Problemas, cujo foco é desenvolver as habilidades dos estudantes em resolver problemas. Um ensino “para” Resolução de Problemas, cujo objetivo é apresentar aos alunos definição e suas propriedades e, às vezes, enunciados de maneira simplificada e sem demonstração. Em um ensino “através” Resolução de Problemas, os problemas são valorizados não apenas com o propósito de aprender matemática, mas também com principal meio de fazer matemática. Nessa abordagem, começamos com uma situação-problema que envolvesse os conceitos relacionados aos conteúdos a serem ensinados podendo ser vista como um movimento do concreto para o abstrato.

O Projeto de Ensino foi planejado para ser desenvolvido em 15 encontros (aulas) de uma hora e quarenta minutos cada, durante os meses de setembro e de outubro. Em cinco desses encontros denominados de “primeira etapa”, trabalhamos com o ensino “sobre” Resolução de Problemas, quando levamos problemas com intuito de ensinar os estudantes a resolver problemas.

Na segunda etapa, composta por cinco encontros, focamos no ensino “através” Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas Resolução de Problemas. Nela, buscamos abordar os conceitos realacionados aos logaritmos, sua definição e propriedades.

Já na terceira e última etapa, foi utilizada a o ensino “para” da Resolução de Problemas com intuito de introduzir os conceitos de função logarítmica.

5.2.5 Elaboração do Roteiro de Atividades para do Projeto de Ensino "O Ensino de Logaritmos e de Função Logarítmica utilizando as abordagens de ensino “sobre Resolução de Problemas”, “para Resolução de Problemas” e “através da Resolução de Problemas”

Durante a aplicação do Projeto de Ensino, procedimento geral, não tivemos o propósito de fazer qualquer alteração nos conteúdos da disciplina de acordo com o Currículo Referência do Estado de Goiás. O que pretendíamos era propor, na introdução dos conceitos, uma metodologia diferente da tradicional vigente. Acreditamos que essa metodologia é capaz de provocar um verdadeiro processo de ratificação de ideias consideradas muito abstratas, isto é, trazer essas ideias para um nível de entendimento dos alunos por intermédio de uma relação com conhecimento que esses alunos já possuíam.

Para a seleção de atividades e de problemas, escolhemos livros de Matemática dos Ensino Fundamental e Médio, Provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Dissertações e Teses atendendo às abordagens do ensino pela Resolução Problemas.

O desenvolvimento do projeto de pesquisa se deu durante 15 encontros nos meses de setembro e de outubro de 2018, totalizando 30 horas/aula. O planejamento das aulas e as respectivas atividades para cada encontro foram definidas de acordo com a matriz curricular e o cronograma escolar. As atividades foram escolhidas de forma a serem desenvolvidas utilizando todo o tempo da aula.

A resolução das atividades será feita sempre nos primeiros encontros posteriores à aula na qual foram entregues as atividades. Seguimos o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através a Resolução de Problemas, no qual também foram realizadas a plenária, que ocorre livremente em sala de aula com a participação de todos os alunos, e a formalização, relacionada aos conteúdos desejados para abordagem em cada encontro, elaborada pelo professor.

5.2.6 Elaboração do Termo de Compromisso e Responsabilidade, Consentimento de Participação do Aluno como Sujeito da Pesquisa e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE

O Termo de Compromisso e Responsabilidade, Consentimento de Participação do aluno como sujeito da pesquisa e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE foram construídos conjuntamente entre o Professor-Pesquisador e os alunos da turma do primeiro ano do Ensino Médio. Os termos apresentados aos alunos e debatidos com os alunos o qual poderia sofrer alterações, serviram para definir a relação entre Professor-Pesquisador e alunos durante toda aplicação do plano de ensino em sala de aula.

O Professor-Pesquisador teve de apresentar uma proposta inicial dos termos que ele considerasse necessários e convenientes para ambas as partes (professor e alunos) e que tornasse possível o desenvolver das atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula. Após acordo firmado pela maioria, o documento foi assinado por todos os presentes. Uma cópia desse documento se encontra no Apêndice B deste trabalho.

Os procedimentos P_7: Aplicação e Execução do roteiro de atividades pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio; e Análises dos resultados e conclusões encontram-se detalhadas no próximo capítulo em que apresentamos o terceiro bloco do Modelo de Romberg-Onuchic, destinado a descrever as ações da pesquisa e, por meio das informações coletadas, responder à pergunta da pesquisa.

6 DESCRIÇÕES DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E ANÁLISES DOS DADOS

Neste capítulo, uma das etapas do terceiro bloco do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, serão apresentadas às ações, decorrentes desta pesquisa, que buscaram determinar as informações relevantes, entendê-las e interpretá-las. Nesta etapa, relatar-se-á como se deu a aplicação do Projeto de Ensino e as atividades realizadas em cada encontro. Durante a descrição da aplicação do projeto, é apresentada uma análise das evidências levantadas, com objetivo de responder à pergunta da pesquisa e ter subsídios para efetivação do Produto Educacional.

6.1 O Contexto da Pesquisa e a Coleta e Análises das Evidências

O Projeto de Ensino, como foi mencionado anteriormente, foi elaborado com intuito de produzir uma metodologia de Ensino que fizesse uso das três abordagens de Resolução de Problemas apresentada em Schroeder e Lester (1989). Com intuito de verificar as potencialidades dessa metodologia, ela foi utilizada em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual de Período Integral (CEPI) – José Salviano Azevedo, localizado na cidade de Santa Helena de Goiás, no período de 4 de setembro até 18 de outubro de 2018.

O CEPI – José Salviano Azevedo possui três turmas de primeiro ano do Ensino Médio, 1os A, B e C, contudo, considerando o horário de aulas das turmas, uma sugestão da professora-colaboradora e o fato do Professor-Pesquisador ministrar aulas em uma cidade vizinha, decidiu-se aplicar o Projeto de Ensino em uma única turma, 1º C, escolhida por conveniência de horários. As aulas ocorreram nos períodos matutino e vespertino, perfazendo 6 aulas semanais. A turma era composta por 28 alunos durante a aplicação do projeto. Como também já foram mencionados no Projeto de Ensino, os conteúdos trabalhados nas aulas foram: Logaritmos e Função Logarítmica.

Como já foi mencionado no Capítulo 2, para a coleta de dados, utilizou-se a observação em sala de aula, os registros em diário de campo, gravações em mídias (áudios e vídeos), materiais desenvolvidos pelos alunos (atividades feitas em sala de aula). E, levando em consideração a característica da pesquisa, adotou-se para análise dos dados uma abordagem qualitativa, na perspectiva descrita por Kauark (2010), Triviños (1987) e Chizzotti (2003). Nessa perspectiva, a análise se deu a partir do levantamento de evidências, durante e depois da aplicação do projeto; leitura e interpretação dessas evidências, pelo pesquisador; a busca da correlação com outras pesquisas consolidadas, de cada evidência relevante levantanda; e, o posicionamento crítico do pesquisador, fundamentado na interpretação e entendimento dessas evidências, frente ao referencial teórico apresentado neste trabalho.

A análise das evidências levou em consideração aspectos relacionados aos temas principais desta pesquisa: Resolução de Problemas; Logaritmo e Função Logarítmica. A Resolução de Problemas, dentre outras coisas, serviu como apoio para uma metodologia pedagógica, usada para ensino de Logaritmo e Função Logarítmica, durante a aplicação do Projeto de Ensino composto por três etapas. Na primeira etapa, buscou-se familiarizar o aprendiz com metodologias de ensino, na abordagem "sobre Resolução de Problemas", que utiliza resolução de problema e, também, objetivou-se desenvolver sua habilidade de raciocinar diante de um problema de matemática. Na segunda etapa, considerando que o aluno já estava pronto para aceitar uma nova forma de ensino, foi trabalhada o ensino "através Resolução de Problemas" da Resolução de Problemas. E, por fim, na terceira etapa, foram propostas atividades que pudessem levar o aluno a aplicar seu conhecimento matemático "para Resolução de Problemas" para aplicar conceitos na resolução de novos problemas. Observe que essas três etapas constituem exatamente as três abordagens que consistem no trabalho de Resolução Problemas em Sala de aula de acordo com Schroeder e Lester (1989).

Todos os encontros foram elaborados a partir de problemas, considerando a bimestralização prevista no Currículo Referência do Estado de Goiás para a Educação Básica, frente às expectativas de aprendizagem, e os conteúdos programáticos estabelecidos pelo currículo da escola. Durante a descrição desses encontros, comentar-se-á as atividades desenvolvidas pelos alunos em grupo e individualmente. Diante disso, serão apresentados diálogos entre aluno e Professor-Pesquisador; aluno e aluno; e, aluno e Professora-Colaboradora; além de falas individuais ou coletivas. E, para maior entendimento desses diálogos, foram estabelecidas as seguintes notações:

* *PP* Para as falas do Professor-Pesquisador;

* *PC* Para as falas da Professora-Colaboradora;

* $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{28}$ Para os alunos participantes do diálogo;

* $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_7$ Para grupos que foram formados para resolver um problema e participar do diálogo.

* *(...)* Para indicar que não foi possível compreender o que foi dito;

* *(texto)* Para apresentar um comentário feito pelo pesquisador no entendimento do significado de uma frase;

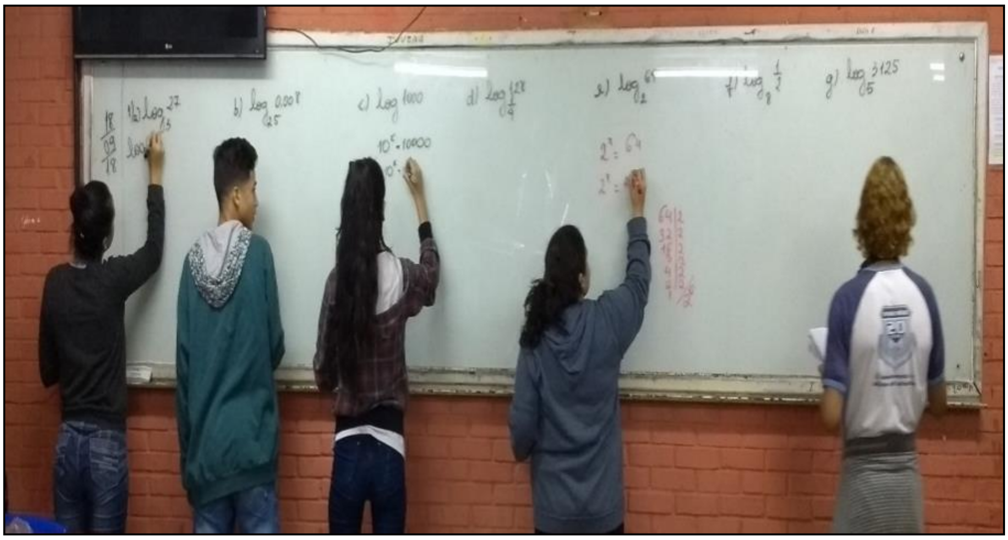
* *[...]* Supressão de parte do diálogo, por não ser considerado relevante naquele momento.

6.2 Os Encontros

Os encontros aconteceram nos momentos em que o Professor-Pesquisador esteve em sala de aula, juntamente com a Professora-Colaboradora, aplicando o Projeto de Ensino e observando e analisando cada acontecimento. O planejamento desses encontros está formatado em um projeto de ensino apresentado na sua íntegra no apêndice A.

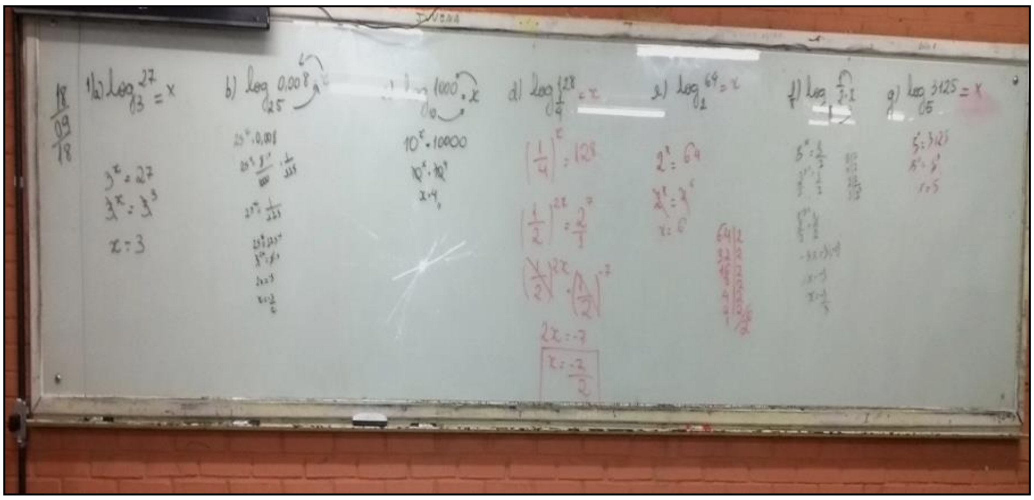
As Figuras 5 e 6, a seguir, ilustram, respectivamente, os alunos apresentando resoluções no quadro branco e o quadro branco com as respectivas resoluções.

Figura 5 – Alunos Apresentando resoluções no quadro



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Figura 6 – O quadro com as resoluções dos Estudantes



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

1º Encontro

No primeiro encontro, o Professor-Pesquisador fez a apresentação geral do trabalho, por meio de exposição oral com auxílio do quadro branco e pincel, a ser desenvolvido durante a aplicação do Projeto de Ensino, bem como o papel de cada um dos integrantes (Professor-Pesquisador, Professora-Colaboradora e alunos) nesse processo. Após essa apresentação, foram entregues aos alunos o Termo de Compromisso e Responsabilidade para levar aos seus responsáveis pedindo a autorização para participar do projeto, Termo de Consentimento de Participação e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE, que se encontram nos Apêndices B e C. Esses documentos foram lidos, discutidos e aprovados com as modificações necessárias.

2º Encontro

6.2.1 Ensino “sobre” Resolução de Problemas

No segundo encontro, o Professor-Pesquisador trabalhou com os alunos atividades dentro da abordagem “sobre”, cujo foco, como já foi mencionado anteriormente neste texto, é desenvolver habilidades dos estudantes em resolver problemas. Para que isso se realizasse o Professor-Pesquisador pediu que os alunos formassem grupos para resolver a atividade desse encontro. A formação desses grupos foi feita de forma espontânea pelos próprios alunos.

A primeira atividade proposta teve o intuito de levar os educandos a usarem algumas das estratégias apresentadas por Larson (1983) e Polya (1995). O Professor-Pesquisador preparou um texto explicativo sobre estratégias que seriam utilizadas durante a aplicação da pesquisa na abordagem “sobre” resolução de problemas, bem como uma série de problemas. Em seguida, orientou os estudantes que fizessem a leitura do problema e tentassem resolvê-lo, utilizando as estratégias apresentadas no texto que lhes fora entregue. Essa dinâmica objetivou verificar como os alunos organizariam suas ideias pautadas nas orientações propostas pelo Professor-Pesquisador, para entender ou construir uma estratégia para resolver o problema.

Problema 1

Um terreno retangular mede 36 m de comprimento por 21 m de largura. O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores, plantadas de forma que a distância entre duas árvores consecutivas seja a mesma, e, além disso, a distância deve ser o maior número inteiro possível. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual deverá ser a distância entre duas árvores consecutivas e quantas árvores ele deverá plantar?

Fonte: Adaptado de Krulick; Rudnick (2005, p. 34) apud Noguti (2014, p. 226).

Além do objetivo inicial, pretendia-se, também com esse problema, explorar os conceitos relacionados à Divisibilidade, Máximo Divisor Comum (M.D.C.), Mínino Múltiplo Comum (M.M.C.), Fatores Primos, Grandezas e Medidas, e suas respectivas operações.

Para a resolução desse problema, o Professor-Pesquisador orientou os discentes que fizessem uso orientações apresentadas no início deste encontro. Por meio de uma análise do comportamento dos educandos, de suas falas, o material produzidos por eles e discussões entre aluno e Professor-Pesquisador, foi possível perceber que cada grupo de alunos conseguiu, de maneira própria, interpretar e compreender essa atividade mesmo quando a sua solução não estava correta. Porém, mesmo quando isso ocorria, o objetivo da atividade era alcançado, pois o intuito dessa atividade era que os estudantes aprendessem utilizar as estratégias propostas.

Discussões em sala

Para ilustrar como se deu a aplicação dessa atividade em sala de aula, apresentamos um diálogo envidenciando uma discussão entre os grupos e o Professor-Pesquisador. Questionados sobre os resultados encontrados, os grupos se manifestaram apresentandos as quantidades possíveis de árvores que poderiam ser plantadas, conforme podemos ver a seguir:

> *G_5: Professor, nós encontramos 38 árvores.*
> *P_p: Uhm.... tá bem!!! Como chegaram a esse valor?*
> *G_5: A gente somou os lados do retângulo que totalizaram 114 m e depois dividimos por 3.*
> *P_p: Sim, mas como vocês chegaram à conclusão do porquê deveriam dividir por 3?*
> *G_5: Professor, tentamos vários valores, porém o que dava um número inteiro eram 3 e 6. E como no problema foi dito que deveria se ter a maior quantidade de árvores plantadas, consideramos o 3, totalizando 38 árvores.*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Segundo Polya (1995, p. 3) “a Resolução de Problemas é uma habilitação prática e adquirida resolvendo problemas”. E, a parte mais importante desse processo é o entendimento do enunciado, pois somente quando os alunos compreendem o enunciado do problema, eles conseguem produzir ideias e relacioná-las com as estratégias estudadas e discutidas em sala de aula. Diante disso, depois de um certo tempo, o estudante acabará por descobrir o uso correto dessas estratégias e, nesse processo, poderá adquirir habilidades para resolver um problema de matemática, independente da sua natureza.

Polya (1995) salienta que durante a resolução de um problema muitos enganos podem ser evitados, se na execução da sua estratégia o estudante verificar cada passo. Todo trabalho pode ser perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa.

A princípio o Professor-Pesquisador, observando o diálogo apresentado anteriormente e confrotanto-o com a proposta de Polya (1995), habilitação prática, ele observou que as indagações foram compreendidas e atentamente consideradas pelos alunos, ao analisar a frase: "E como no problema foi dito que deveria se ter a maior quantidade de árvores plantadas", e, além disso, o Professor-Pesquisador também percebeu que o resultado da divisão deveria ser um número inteiro, por se tratar de números de árvores. Portanto os alunos identificaram as partes principais do problema, a incógnita, os dados e a condicionante, sob vários pontos de vista.

Quando o Grupo 5, em discussão na sala aula, apresentou sua resolução, a que acabamos de discutir, o Professor-Pesquisador não atentou-se para um equivoco que ocorreu durante as argumentações da resolução apresentada por esse grupo, possivelmente pelo fato da solução por ele apresentada estar correta. Quando os estudantes desse grupo afirmaram que para dividir de 114 e obter um número inteiro, deveriam escolher como divisores 3 ou 6 e, a partir disso, concluíram que a maior distância entre as árvores seria 3 metros eles não perceberam que os divisores de 114 não são apenas 3 e 6, de fato os divisores de 114 são (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114).

Somente após uma análise mais criteriosa, fora da sala de aula, o Professor-Pesquisador percebeu o equivoco mencionado no parágrafo anterior . Durante essa nova análise ele pode observar que a resolução desse problema não deveria ser considerada correta, apesar da solução apresentada por esse grupo coincidir com o resultado do problema. Durante a resolução do problema todos os divisores deveriam ser considerados e descartados por meio da observação correta das condicionantes, principalmente da que afirma que em cada canto do terreno deveria ter uma árvore.

Diante do que foi exposto, os números 38, 57 e 114 seriam ser descartados por ser maior que o comprimento do terreno, consequentemente ao se plantar uma árvore em um dos cantos, a proxima, considerando uma dessas distâncias não seria no canto do terreno. O descarte do número 19 se daria pelo fato de que, ao se plantar uma arvoré em um dos cantos a próxima seria 19 metros a segunda seria 19 metros depois e a terceira seria 38 distante da primeira, ultrapassando o próximo canto. De forma análoga pode-se descartar as distância 2 e 6 metros ou seja plantando a primeira árvore em um dos cantos e as demais considerando uma dessas distâncias, pelo mesmo um dos cantos não terá uma árvore plantada.

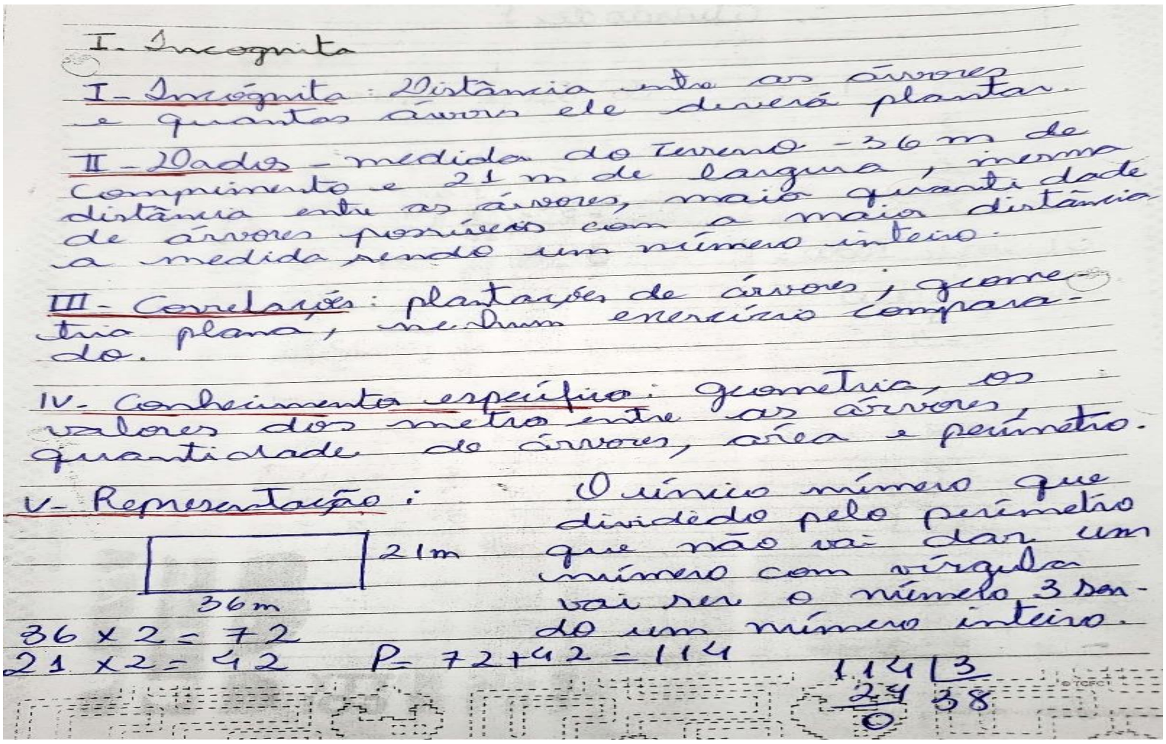
Observe que não é suficiente que a distância entre as árvores seja um divisor de 114 metros na verdade ela deve dividir o comprimento e o largura do terreno, isto é, 36 m e 21 m. Portanto os valores que não devem ser descartados por essa condicionante ter uma árvore em cada canto, seriam 1 e 3. E, pela a exigência da distância ser a maior possível, concluímos que essas distâncias deve ser 3 metros, ou seja, a maior distância entre as árvores, obedecendo todas as condicionantes é nada menos que o maior divisor comum entre as medidas dos lados do terreno 21 e 36 metros.

Apesar do equívoco dos alunos de não se atentarem para os divisores de 114, não são apenas 3 e 6, e de Professor-Pesquisador, inicialmente, não ter colocado no seu no planejamento possíveis soluções que necessitassem avaliar todos os divisores, essa situação foi bastante enriquecedora para esta pesquisa, pois possibilitou que o Professor-Pesquisador reavaliasse seu plano de ensino, as possibilidades de condução desse tipo de aula e enriquecesse seu conhecimento experiencial. E, ainda uma análise criteriosas do que ocorreu em sala de aula, fez com que esse problema pudesse ser melhor aproveitado para a composição da Sequência Didática, apresentada como parte desse trabalho com orientações para que outros professores observem o pontêncial que um problema dessa natureza pode proporcionar, para o desenvolvimento de habilidades, visto que, em um problema didático pode-se conseguir o desenvolvimento dessas habilidades, mesmo que os metódos usados para resolver o problema sejam equivocados, pois é sabido que mesmo se o erro for trabalhado adequadamente, ele poderá proporcionar certa aprendizagem como salienta Alves e Morgado (2013) os quais consideram que aceitar, errar e sucessos com a mesma proporção, permitindo que o estudante obtenham uma melhor compreensão sobre o que estão aprendendo, e assim abrir caminhos para ativação da aprendizagem significativa. E, observando, através do que ocorreu durante essa atividades, que houve um progresso nas outras resoluções feitas pelos estudantes.

Observando a resolução feita pelo Grupo 2, concluímos que as estratégias sugeridas foram utilizadas corretamente pelos alunos durante a resolução do problema, ou seja, o grupo registrou todos os passos para a criação de sua estratégias , esse grupo, durante a criação de sua estratégia levou em consideração a sugestão do Professor-Pesquisador como agir diante de um problema em que não sabemos resolver ou seja: a identificar a incógnita, evidenciar os dados, verificar a existência de correlações, observar possíveis conhecimentos necessários para resolver um problema e, se possível, construir uma representação que relacione os dados e a incógnita. Todo esse processo levou em consideração os apontamentos de Polya (1995) quando ele ressalta, na segunda parte de seu livro, que o leitor deve-se familiarizar, aperfeiçoar a compreensão, procurar uma ideia proveitosa, e elaborar e executar o plano e, após a execução deste plano fazer o restrospecto da resolução do problema.

A seguir, será apresentada uma análises das resoluções feitas pelo Grupo 2 e 7.

Figura 7 – Resolução do Problema feita pelo Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa (2018).

Apesar da desenvoltura desse grupo nas ações para resolver essa problema citados anteriormente eles cometeram os mesmos erros do Grupo 5 ou seja não observou todos os divisores tampouco observou quais desses divisores deveria ser descartados e o porquê. Porém reafirmamos que mesmo com esse erro o problema foi muito proveitoso pelos mesmos motivos já descritos anteriormente na análise do Grupo 5.

O Grupo 4 disse que chegaram ao total de 34 árvores, plantadas no terreno, com as dimensões sugeridas pelo enunciado do problema. Para melhor esclarecimento do que ocorreu em sala de aula apresentamos uma discussão do Professor-Pesquisador e o Grupo 4.

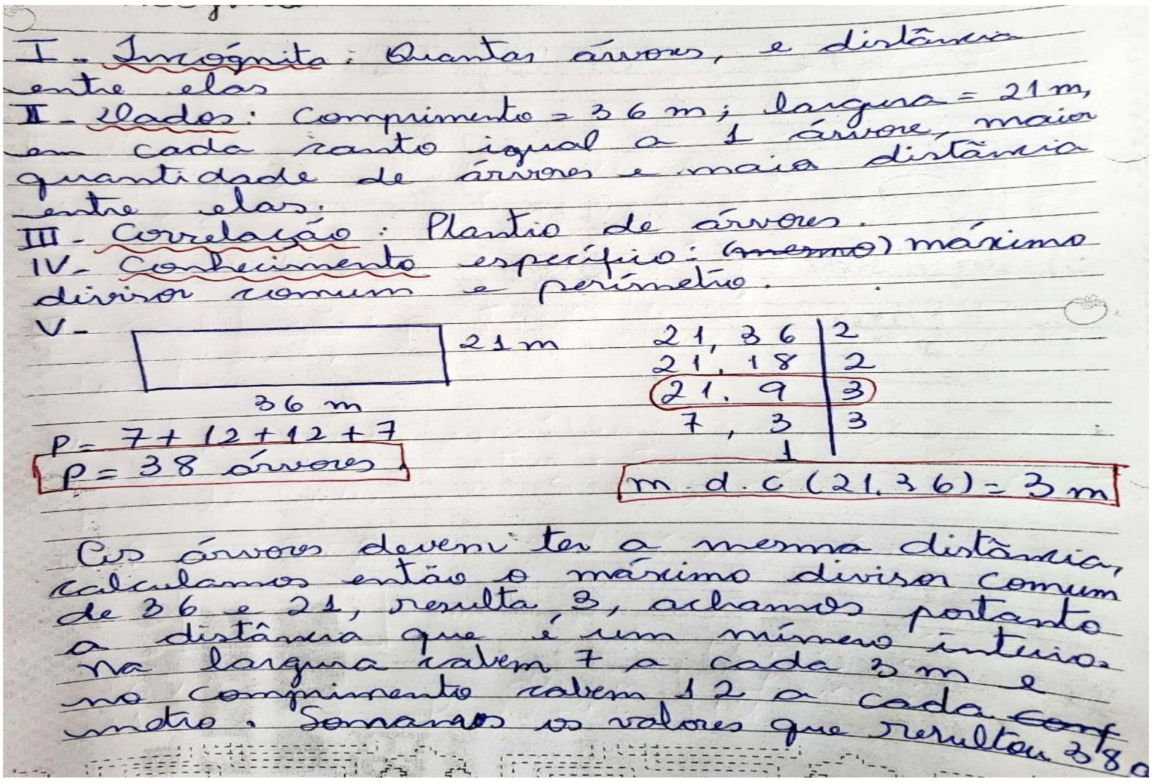
> *G_2: Professor nós encontramos 34 árvores.*
> *P_p: Como e o que observaram durante a resoluçãodo problema para chegarem nesta conclusão?*
> *G_2: Olha..... como já havia 4 árvores plantadas...*
> *P_p: Espera aí, o problema trouxe essa informação que as árvores estavam plantadas? Verifique os dados do problema novamente?*
> *G_2: Sim... Acho que sim... Ah espera aí, professor, disse "se em cada canto for plantada uma árvore", fizemos as contas erradas, não consideramos as árvores dos cantos. Se considerá-las, teremos um total de 38 árvores.*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Polya (1995) salienta que a compreensão do problema é de suma importância, mas não só isto, o aluno deve também desejar resolvê-lo, pois se não compreender o problema e se não tiver interesse, dificilmente conseguirá resolve-lô. Este grupo, de maneira analoga ao Grupo 5 não se atentou para a condicionante de se ter uma árvore em cada canto. Como relata Polya (1995) uma vez compreendido o problema, pode-se tentar recombinar os seus elementos de maneira geral, examinar as partes principais, constatamos que o Grupo 5, como pode ser observando na figura 6 de fato, esse grupo conseguiu determinar: a incógnita do problema, os dados relevantes que auxiliarão para determinar a incógnita, as correlações levantadas e os conhecimentos específicos abordado. E, ainda fazer uma representação, por meio de um retângulo, para ilustrar o terreno ao qual seria utilizado para o plantio das árvores.

Isso mostra claremente o desenvolvimento dos estudantes desse grupo e consequentimente maior desenvolutura, para se trabalhar um problema novo, tendo-se assim um desenvolvimento de habilidades.

Agora, faremos a outra análises da resoluções do primero problema feita pelo Grupo 7.

Figura 8 – Resolução do Problema feita pelo Grupo 7


I - Incógnita: Quantas árvores, e distância entre elas
II - Dados: comprimento = 36 m; largura = 21 m, em cada canto igual a 1 árvore, maior quantidade de árvores e maior distância entre elas.
III - Correlação: Plantio de árvores.
IV - Conhecimento específico: (~~mesmo~~) máximo divisor comum e perímetro.
V -
21 m
36 m
21, 36 | 2
21, 18 | 2
21, 9 | 3
7, 3 | 3
1
P = 7 + 12 + 12 + 7
P = 38 árvores
m.d.c (21, 36) = 3 m
As árvores devem ter a mesma distância, calculamos então o máximo divisor comum de 36 e 21, resulta 3, achamos portanto a distância que é um número inteiro. Na largura cabem 7 a cada 3 m e no comprimento cabem 12 a cada metro. Somamos os valores que resultou 38 a

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Pode-se perceber que este grupo fez uso das orientações sugeridas pelo Professor-Pesquisador, pois, é possível verificar que o grupo evidenciou a incógnita, o número total de árvores e a distância entre elas; considerou as condicionantes como dados do problema: que a distância entre as árvores seria a maior possível e inteira e, além disso cada em canto do terreno deveria-se plantar uma árvore. E, apartir disso, eles perceberam que a distância entre as árvores deveria ser o maior número inteiro que dividisse ao mesmo tempo 21 e 36, e para isso bastaria determinar o Maior Divisor Comum entre esses dois números.

Observando todo o processo de aplicação dessa atividade, Problema 1, é possível perceber que sempre que se cria um projeto de ensino e o coloca em prática, não necessariamente ocorrerá tudo que foi previsto a priori, pois, durante a aplicação do projeto de ensino, nem tudo poderá ser controlado pelo pesquisador. E, além disso, o próprio pesquisador estará sujeito a equívocos, E isso ressalta ainda mais a importância de se testar, na prática, todo produto educacional, caso que aconteceu com a nossa sequência didática, que além de testada passou por uma rigorasa análise, até sua conclusão.

3º encontro

Iniciamos o 3º encontro fazendo um feed back do encontro anterior e revendo alguns pontos pertinentes sobre de Resolução de Problemas, sugeridas por Larson (1989) e Polya (1995).

Problema 2

Ivete decidiu doar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta por menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade dessa coleção para um hospital e manter seus 10 livros favoritos. Ela irá dividir igualmente os livros restantes entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis.

Fonte: Krulick; Rudnick (2005, p. 34) apud Noguti (2014, p. 234).

Quando os estudantes de cada grupo fizeram a primeira leitura, eles se sentiram inseguros e ficaram um pouco confusos e tiveram dificuldade para dar início à resolução do Problema 2. Diante disso, o Professsor-Pesquisador, ao notar as dificuldade de grupo, orientou-os a buscarem estratégias por meio das orientações sugeridas anteriormente e, agindo como mediador, ele ajudou-os a sanar algumas dúvidas que lhes restavam. Com isso, aos poucos os grupos foram resolvendo essa atividade. No primeiro momento, a maioria dos grupos queriam resolver o Problema 2 da maneira que estavam acostumados, por práticas anteriores à está proposta de ensino, que não seria a maneira adequada, de acordo com a proposta de ensino “sobre” Resolução de Problemas, base desta primeira etapa de pesquisa. Porém, apartir de observações e sugestões do Professor-Pesquisador, eles conseguiram criar, organizar e executar estratégias para resolver este problema.

Discussões em sala

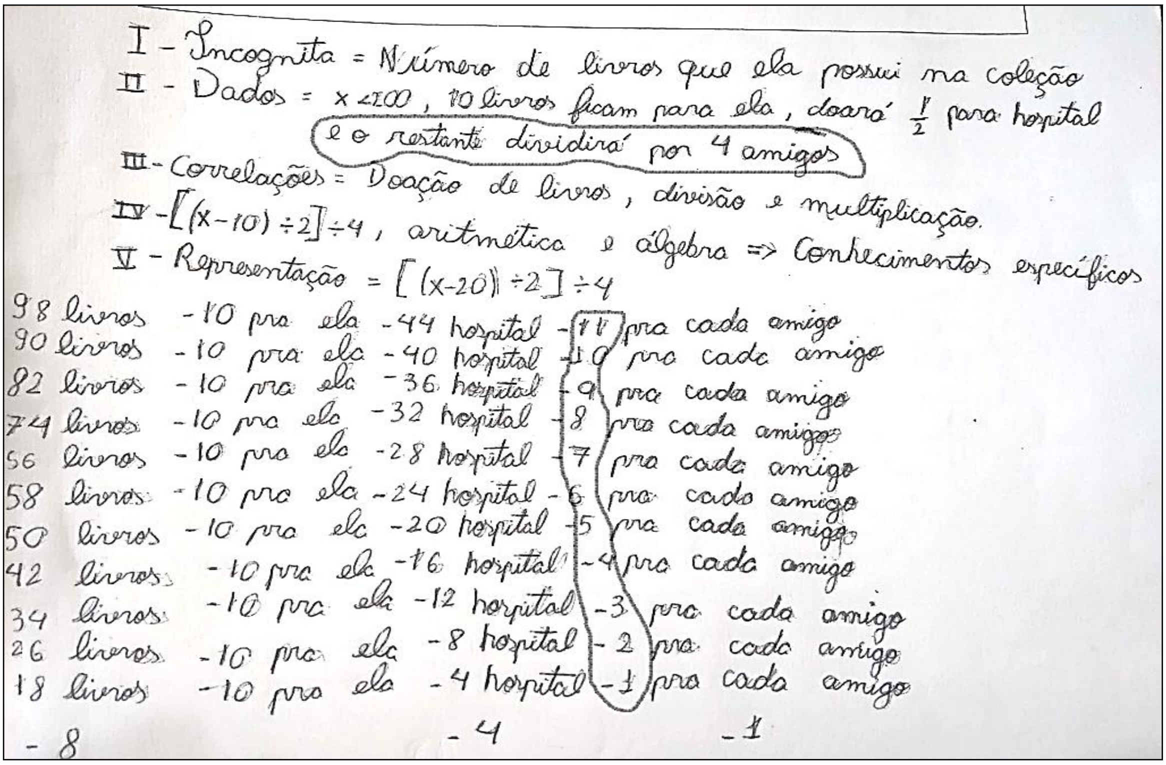
Logo no início da discussão do Problema 2, os alunos do Grupo 4 estavam debatendo sobre as possíveis soluções encontradas. Cada aluno desse grupo determinou um valor diferente, como solução para esse problema. Além disso, houve um fato interessante, evidenciados por alguns membros desse e de dos outros grupos, que causou-lhes surpresa, este fato eram a quantidade de soluções encontradas, ou que poderiam ser encontradas, que não eram-lhes costumeiros.

O Professor-Pesquisador aproveitou essa discussão para enfatizar que problemas podem ter uma, ou duas, ou várias soluções, e até mesmo não ter soluções, isso pode ser observado pelo diálogo a seguir.

> *G_4: Professor, agora entendemos que os problemas podem ter mais de uma solução. No nosso grupo, determinamos duas soluções: 96 e 92.*
> *Pp: Como assim?... Vamos ler novamente o problema. "Ivete decidiu doar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta por menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade dessa coleção para um hospital e manter seus 10 livros favoritos. Ela irá dividir igualmente os livros restantes entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis".*
> *G_4: Então professor... disse no enuciado que a quantidade de livros é menor que 100...*
> *Pp: Sim, mas veja que o fato da Ivete ter menos de 100 livros, não da para saber quantos livros ela tem, precisamos verificar e considerar algumas questões como quais os dados que o problema trouxe que são relevantes ou necessários para determinar a quantidade de livros, que poderia estar na coleção de Ivete.*
> *G_4: Ah sim, então não é só escolher o que ela tem... ela quer doar uma parte para o hospital, para amigos e quer ficar com alguns. Então podemos construir uma tabela, professor?*
> *Pp: Uhm... pode sim, ótima ideia!*
> *G_4:Professor, nós conseguimos fazer uma fórmula matemática também.*
> *Pp: Excelente! vocês conseguiram seguir uma linha de racíocinio parecida com áquela utilizada no Problema 1.*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Faremos, agora, uma descrição da resolução dessa atividade, feita pelo Grupo 5. essa descrição é feita por meio da apresentação da resolução descrita e apresentada por esse grupo.

Figura 9 – Resolução do Problema feita pelo Grupo 5

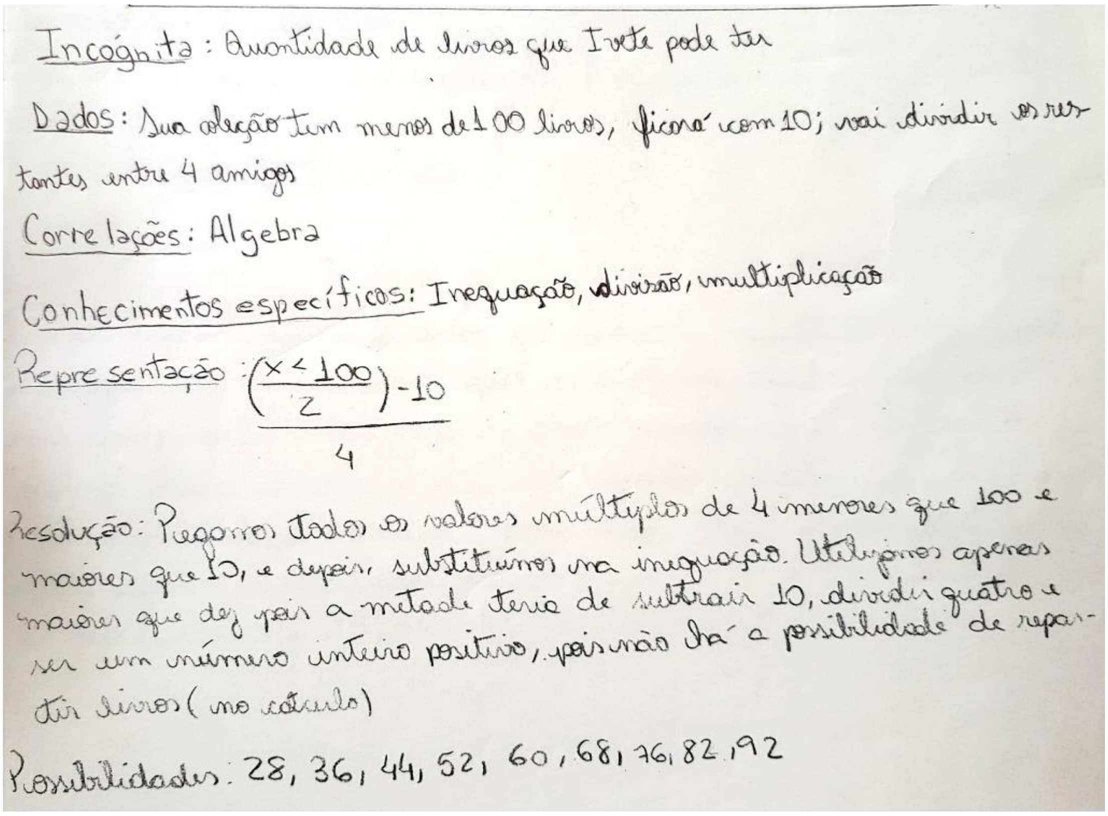

I - Incognita = Número de livros que ela possui na coleção
II - Dados = $x < 100$, 10 livros ficam para ela, doará $\frac{1}{2}$ para hospital
e o restante dividirá por 4 amigos
III - Correlações = Doação de livros, divisão e multiplicação.
IV - $[(x-10) \div 2] \div 4$, aritmética e álgebra => Conhecimentos específicos
V - Representação = $[(x-20) \div 2] \div 4$
98 livros -10 pra ela -44 hospital -11 pra cada amigo
90 livros -10 pra ela -40 hospital -10 pra cada amigo
82 livros -10 pra ela -36 hospital -9 pra cada amigo
74 livros -10 pra ela -32 hospital -8 pra cada amigo
66 livros -10 pra ela -28 hospital -7 pra cada amigo
58 livros -10 pra ela -24 hospital -6 pra cada amigo
50 livros -10 pra ela -20 hospital -5 pra cada amigo
42 livros -10 pra ela -16 hospital -4 pra cada amigo
34 livros -10 pra ela -12 hospital -3 pra cada amigo
26 livros -10 pra ela -8 hospital -2 pra cada amigo
18 livros -10 pra ela -4 hospital -1 pra cada amigo
-8 -4 -1

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

O Grupo 5, conforme a Figura 9, construiram uma tabela e, seguindo os passos sugeridos por Larson (1983) e Polya (1995), desenvolveram um processo de resolução, a partir de uma dedução algébrica, por meio da construção desta tabela. Esse grupo conseguiu determinar algumas possíveis soluções, ou seja, quantidades possíveis de livros de Ivete. Mas não compreendeu corretamente o enunciado do problema, pois eles consideraram que a metade que seria doada, ao hospital, seria calculada depois que Ivete retira-se seus 10 livros favoritos. Porém, de acordo com o enunciado, ela dividiu a metade com o hospital, depois separou 10 exemplares favoritos para si e o restante seria divido entre quatro amigos.

A seguir, apresentamos a Figura 10, que traz a resolução do Grupo 3. Faremos, em seguida, uma descrição e o processo de interpretação e resolução, do segundo problema, feita por este, através de um diálogo entre os alunos e Professor-Pesquisador.

Figura 10 – Resolução do Problema feita pelo Grupo 3



Incógnita: Quantidade de livros que Ivete pode ter

Dados: Sua coleção tem menos de 100 livros, ficará com 10; vai dividir os restantes entre 4 amigos

Correlações: Algebra

Conhecimentos específicos: Inequação, divisão, multiplicação

Representação: $\dfrac{\left(\dfrac{x<100}{2}\right)-10}{4}$

Resolução: Pegamos todos os valores múltiplos de 4 menores que 100 e maiores que 10, e depois, substituímos na inequação. Utilizamos apenas maiores que dez pois a metade teria de subtrair 10, dividir quatro e ser um número inteiro positivo, pois não há a possibilidade de repartir livros (no cálculo)

Possibilidades: 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 82, 92

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

O Grupo 3 seguiu as orientações propostas no segundo encontro. Foi possível observar que na representação, feita por este grupo, houve uma generalização dos dados do problema, por meio da construção de uma fórmula algébrica, que pudesse ser utilizada para determinar a quantidade de livros que Ivete possuía. Com isso, esse grupo conseguiu verificar, também, quais valores seriam válidos para as possíveis quantidades de livros, que poderiam estar na coleção de Ivete.

De acordo com Polya (1995),

> Ao tentarmos resolver um problema, consideramos um a um dos seus aspectos, resolvemos os mesmos incessantemente na nossa mente: a VARIAÇÃO DO PROBLEMA é essencial ao nosso trabalho. Podemos variar o problema pela DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO dos seus elementos ou pela utilização dos recursos de GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO e ANALOGIA. A variação do problema pode nos levar a elementos auxiliares ou à descoberta de um PROBLEMA AUXILIAR mais acessível (POLYA, 1995, p. 88).

Podemos perceber que os Grupos 3 e 5, que acabamos de descrever, resolveram a atividade desenvolvendo um Raciocício Heurístico, “que é provisório e apenas plausível, é importante na descoberta da solução, mas não o tome por uma demonstração” POLYA, (1995, p. 88), sendo que a Heurística visa à generalidade, ao estudo de procedimentos que independem do assunto em questão e são aplicáveis a problemas de toda a sorte. Podemos verificar nessas duas resoluções que os alunos dos Grupos 3 e 5 conseguiram generalizar os dados do problema.

O Grupo 3 determinou as possíveis soluções do Problema 2, sendo perceptível também que, como primeira atividade, fazendo uso da abordagem do ensino“sobre” Resolução de Problema e utilizando as estratégias para resolver o problema, o grupo respondeu à altura do esperado, com envolvimento bastante satisfatório entre os integrantes.

Neste problema, é possível observar claramente a Generalidade e Equacionamento, quando Polya (1995) relata que Generalidade é uma importante característica das indagações e sugestões e pode ser utilizada em todo e qualquer problema seja ele algébrico ou geométrico, e até mesmo não ser matemático. O Equacionamento é como tradução de uma língua para outra, segundo Polya (1995, p. 73) “Equacionar significa expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas”. Nesses termos, o Grupo 3 mostra claramente na resolução do problema uma possibilidade de generalização e equacionamento do Problema 2.

Agora iremos apresentar a uma discussão sobre resolução do Problema 2 por meio de um diálogo entre o Professor-Pesquisador e os alunos.

O Professor-Pesquisador pediu que um representante de cada grupo coloca-se as suas respostas, com as respectivas resoluções no quadro branco. Depois que disso, deu-se início à discussão, com a seguinte pergunta, do Professor-Pesquisador aos alunos, *Quantos livros podem estar na coleção de Ivete?*

> *Alunos: 28, 36, 44, 54 60, 68, 76, 82 e 92 (lendo as respostas que estavam na lousa).*
> *Pp: Certo... e o que esses números têm em comum?*
> *Alunos: São pares.*
> *Pp: O que mais podemos observar?*
> *A_5: São múltiplos de 2 e de 4, e, ainda, são menores que 100 e maiores que 10.*
> *Pp: Eh,... parece que são mesmo, mas todo múltiplo de 2 é de múltiplo 4?*
> *A_{19}: Professor, no enuciado disse que Ivete dividiria com quatro amigos, por isso que os números encontrados foram múltiplos de 4.*
> *Pp: Ah! Todos chegaram nessa mesma conclusão que o A_{19}?*
> *Alunos: Sim...*
> *A_{12}: Professor, nós não encontramos esses valores ...*
> *Pp: Quais valores vocês obtiveram, então?*
> *A_{12}: 18, 26, 34, 42, 50, 58, 74, 82, 90 e 98.*
> *Pp: Leia os dados e a representação que vocês fizeram, novamente, por favor, e como se deu a resolução do problema em si...*
> *A_{12}: Nós chegamos em uma fórmula matematíca,* $[(x-10)/2]/4$.
> *Pp: Hhm... deixa-me entender aqui. Vocês pegaram as possíveis quantidades de livros que Ivete poderia ter e subtraíram 10; e depois dividiram essa diferença por 2; em seguida, esse resultado foi dividido por 4, pois, no caso, seriam quatro amigos.*
> *A_{12}: Isso mesmo professor.*

Pp: Vamos fazer a leitura novamente do problema...
Alunos: Ivete decidiu doar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta por menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade dessa coleção para o hospital e manter 10 livros favoritos. Ela vai dividir igualmente os livros restantes entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis.
A_{12}: Professor, entendi,... ela está planejando dar a metade dessa coleção para o hospital e manter 10 livros favoritos. Nós colocamos que ela pegaria 10 livros para ela primeiro, depois doaria o que sobrou ao hospital.
Pp: Que bom que entenderam [...]
(Diálogo entre professor e aluno, 2018).

Todos os grupos, durante as discussões, foram bastante ativos no processo de ensino, aprendizagem e avaliação. Os erros ocorridos na resolução do problema, feita pelos alunos, em geral,se originava-se, na verdade, no anseio para responder corretamente à questão. Destarte, o objetivo proposto nesse encontro foi atingindo, pois foi possível constatar as fases para a resolução de problemas, apresentadas por Polya (1995), e as tarefas desempenhadas pelos alunos foram até além do que propussemos aos educandos desencandeando um trabalho efetivo e constante para se alcançar o objetivo proposto. Isso, pois, para esses problemas, esperava-se evidenciar quais eram os conhecimentos prévios, dos educandos, relacionados à divisibilidade, múltiplos e à verificação de padrões e operações fundamentais com números naturais. Com as apresentações, no quadro branco, das soluções e resolusões de cada grupo, e as discussões que se seguiram, dentre outras coisas, possibilitou-nos a concluir tal feito.

Durante a correção do Problema 2, feito em discussão com a turma, foi possível constatar a importância da utilização adequada da linguagem matemática na resolução de problemas, e além disso as contribuições que as estratégias desenvolvidas por meio de processos heurístico, auxiliam e orientam os estudantes na resolução e problemas dessa natureza ou de outra.

4º encontro

No quarto encontro, trabalhou-se os Problemas 3 e 4 da primeira etapa do plano de ensino, isto é, utilizando a abordagem de ensino “sobre” Resolução de Problemas, cujo foco é desenvolver habilidades nos estudantes em resolver problemas.

Antes de distribuir uma cópia dos Problemas 3 e 4, o Professor-Pesquisador solicitou aos alunos que formassem os grupos, e sugeriu que eles mantivessem a mesma formação do encontro anterior. E, depois disso, foi distribuído o problema 3 e que apresentamos em à seguir.

Problema 3
Ian tem menos de 100 cartões de beisebol em sua coleção. Se ele colocar em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocar em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocar em pares, sobra apenas um cartão. Quantos cartões Ian têm?

Fonte: Krulick; Rudnick, (2005, p. 28) apud Noguti, (2014, p. 234).

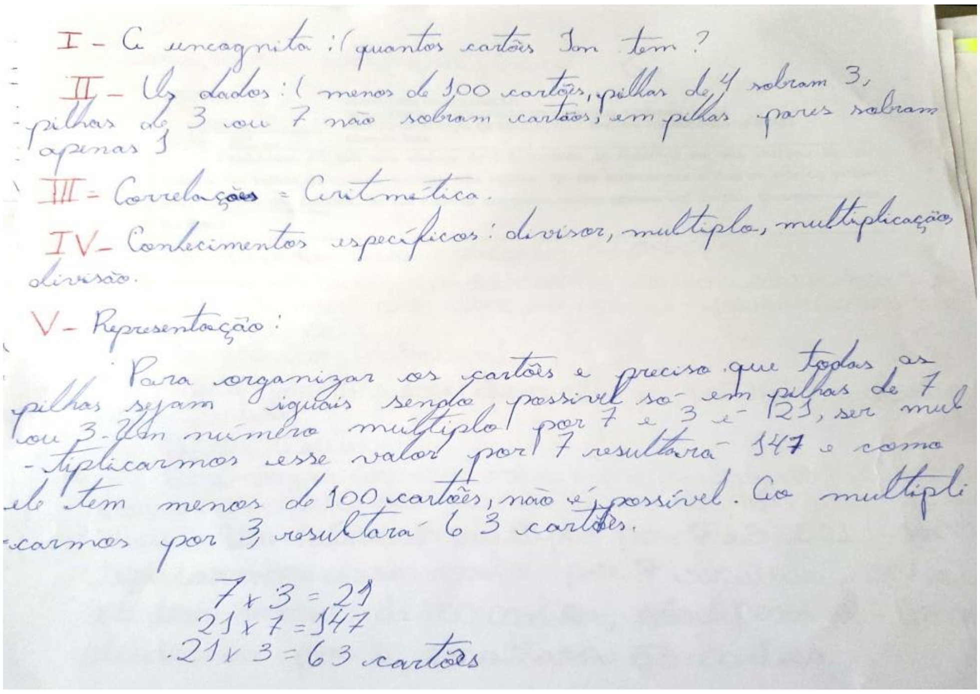
Observou-se que apenas um grupo não conseguiu resolver este problema, apesar de ter seguido as orientações do Professor-Pesquisador. Os demais grupos, para resolver esse problema, utilizaram os critérios de divisibilidade e conceitos de múltiplos. Nesse problema, os alunos se sentiram confiantes, muitos deles conseguiram perceber uma relação desse problema com o Problema 2, e, com isso, consideramos que a resolução do Problema 3 foi mais de simples que a dos anteriores. Polya (1995) salienta que um problema correlato, que já foi antes resolvido, pode auxiliar na resolução deste problema tornando-o simples e de mais fácil entendimento. E essa correlação que o indivíduo faz entre um problema que se desejar resolver com um que ele resolveu é considerado por Larson (1983) como uma das estratégias mais usadas por estudantes, e pode ser bastante eficiente quando esse processo não é feito de forma mecanizada, ou seja, quando o estudante buscar evidenciar as especifícidades desse novo problema, produzindo significado para novos objetos ou conceitos que dele se originar.

Nesse sentido é importante uma postura adequada do professor, ou seja, o professor deve conduzir sua aula de maneira a dar liberdade para que o aluno consiga desenvolver suas próprias estratégias, a partir de orientações do professor em relação as heurísticas, isto é, o professor deve incentivar, estimular e evidenciar elementos que leve o estudante a pensar sobre o problema, somente por meio de um pensamento ativo e reflexivo é que o estudante pode produzir ideias que o conduza na resolução do problema. E isso ocorreu de forma satisfatória durante a resolução do Problema 3, feita pelo Grupo 2.

O Grupo 2 apresentou a resolução do Problema 3 de forma sucinta, como pode ser visto na Figura 10. Para isso, ele descreveu como pensou, em cada etapa da resolução, e apresentou cada cálculo feito entre os dados do problema e os valores obtidos aos da descrição desse processo de resolução, e, no final, apresentou o desfecho por meio dos cálculos necessários para determinar a solução do problema.

Veja, na Figura 11, como o Grupo 2 resolveu o Problema 3.

Figura 11 – Resolução do Problema 3 feita pelo Grupo 2


I - A incógnita: (quantos cartões Ian tem?

II - Os dados: (menos de 100 cartões, pilhas de 4 sobram 3, pilhas de 3 ou 7 não sobram cartões, em pilhas pares sobram apenas 1

III = Correlações = Aritmética.

IV- Conhecimentos específicos: divisor, multiplo, multiplicação, divisão.

V - Representação:

Para organizar os cartões é preciso que todas as pilhas sejam iguais sendo possível só em pilhas de 7 ou 3. Um número múltiplo por 7 e 3 é 21, ser multiplicarmos esse valor por 7 resultará 147 e como ele tem menos de 100 cartões, não é possível. Ao multiplicarmos por 3 resultara 63 cartões.

7 x 3 = 21
21 x 7 = 147
21 x 3 = 63 cartões

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Depois que os grupos terminaram de resolver o problema, o Professor-Pesquisador pediu para que cada grupo colocassem sua resolução no quadro branco. A partir disso, o Professor-Pesquisador fez algumas indagações em uma discussão que pode ser observada no diálogo, a seguir.

Pp: O que vocês acharam desse problema e como se deu a sua resolução?
Alunos: Professor, esse foi muito mais simples, pois com a correlação que fizemos com o problema anterior da "aula passada," facilitou bastante a resolução dessa atividade.
Pp: Sim, esse problema teve quantas soluções? E quantos cartões Ian realmente tinha?
G_3: Professor, esse teve uma solução, que no caso seria o número de cartas de beisebol. Acreditamos que poderia ter uma única solução e, apartir disso descobrimos que Ian possuía 63 cartões.
Pp: Como o grupo pensou durante a discussão feita para se chegar a resposta?
G_1: Podemos falar professor?
Pp: Podem sim.
G_1: Professor, encontramos os números múltiplos de 7 menores que 100, depois vimos quais deles poderiam ser dividos por 3 e 7 ao mesmo tempo e o valores encontrados foram testado para saber quais deles quando fosse dividido por 4 sobraria resto 3, pois formando pilhas de 4 cartas sobrariam 3. E em pilhas de 3 ou 7 não sobram cartões e novamente foram testados para ver quais deles deixariam. E apenas o número 63 satisfez todas essas condições, logo Ian deveria ter 63 cartões.
Pp: Muito bom!
(Diálogo entre professor e aluno, 2018).

Observamos, durante a correção e discussão desse problema com a classe, que os grupos encontraram os múltiplos de 7 menores que 100 e foram verificando as condicionantes estabelecidas pelo enuciado do problema. De acordo com Polya (1995) a intenção de utilizar um problema já resolvido antes, pode ajudar a introduzir elementos auxiliares, necessários a resolução de um novo problema. Isso pode ser evidenciado quando os estudantes do Grupo 1 fizeram uso de “Máximo Divisor Comum” com sucesso. Nem todos os problemas são razoáveis tentar algo semelhante, pois isso se constitui como uma estratégia capaz de evidenciar elementos auxiliares, importantes para resolução deste novo problema, porém é importante ressaltar que nem sempre está estratégia poderá ser utilizada. E assim, como discutido com os estudantes no primeiro encontro, o principal aspecto do uso de estratégias para a resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano, como relatada por Polya (1995).

Nessa resolução, foi possível observar alguns pontos de vista muito parecidos com as demais resoluções que não trouxemos para a discussão, porém os caminhos que os grupos utilizaram, para se obter a solução, foram bastante semelhantes. Diante disso, pode-se concluir que os principais conteúdos que prevaleceram em todos os grupos foram os múltiplos e os divisores. Na resolução desse problema, os estudantes optaram pelo estratégia de analisar cada valor que poderia corresponder à quantidade de cartões de Ian, descartando àqueles que não satisfissem alguma da condicionante, estabelecida pelo enunciado do problema. Polya (1995, p. 4) salienta que “a compreensão do problema está subdividida em dois estágios: a Familiarização e o Aperfeiçoamento da compreensão”, isso pode ser observado nas resoluções do Problema 3, que apresentamos nas resoluções apresentadas pelos Grupos 1, 2 e 3.

Após as discussões, o Professor-Pesquisador pediu aos discentes que voltassem aos seus respectivos grupos, para darem continuidade aos trabalhos do encontro. E, a partir daí, seguiu-se a resolução do Problema 4.

Problema 4

Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato, não necessariamente verdadeiro, e gasta 10 minutos para contá-lo para seus três melhores amigos.

Imagine que cada um dos três amigos resolvesse fazer a mesma coisa, e 10 minutos depois tivessem contado a novidade para três colegas, que ainda não a conhecia. Assim, cada um, que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados gastando, para isso, 10 minutos. Diante disso, responda:

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

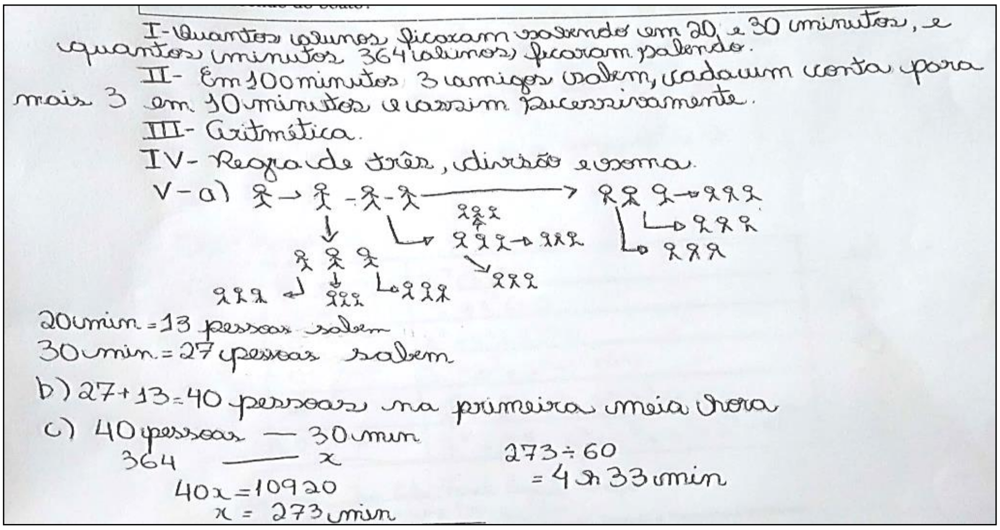
c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

Fonte: Noguti, (2014, p. 234).

Os alunos resolveram este problema utilizando multiplicação de mesma base, ou cálculos aritméticos, ou soma de progressão aritmética, ou outras formas. Percebemos que os alunos demostraram ter mais dificuldades para resolver esse problema, se comparado com os problemas resolvidos anteriormente. Esse problema teve um objetivo diferente dos anteriores, nele, buscamos enfatizar as operações fundamentais com números inteiros, potenciação e radiciação com suas respectivas propriedades, contribuindo assim posteriormente para o ensino das propriedades de logarítmos e de função logarítmica, dentre outras coisas, com enfoque dentro da proposta de ensino "sobre" Resolução de Problemas o qual foi trabalhado nesta primeira etapa da aplicação do Projeto de Ensino.

Vejamos a descrição feita pelo o Grupo 3, e a resolução que eles apresentaram para esse problema como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Resolução do Problema 3 feita pelo Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

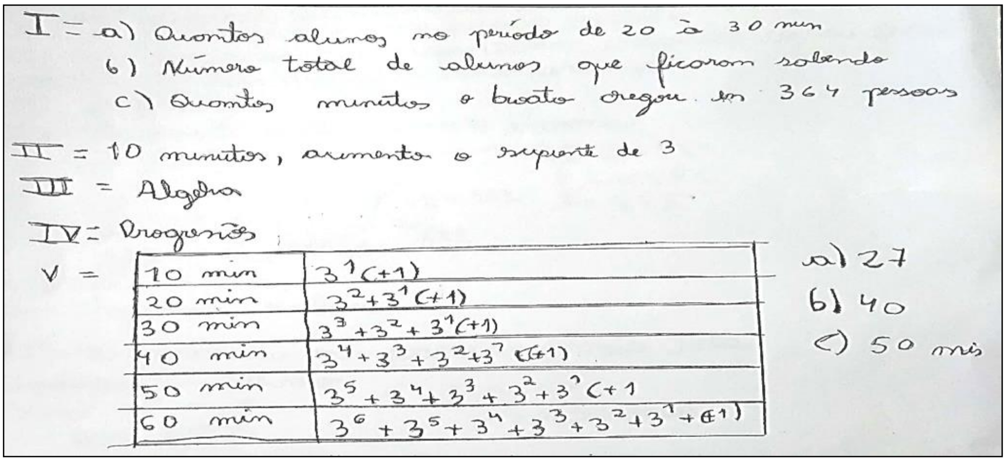
O Grupo 3 resolveu o problema seguindo as orientações do Professor-Pesquisador na busca de estratégias para resolver o problema de com Polya (1995) e Larson (1983). Observamos que esse grupo conseguiu extrair os dados e as condicionantes. E, com isso, fizeram uma representação que pode ser observada na Figura 12. Analisando a resolução feita por esse grupo, verifica-se que na alternativa "a", o grupo conseguiu determinar a quantidade de pessoas que escutaram o boato em 20 e em 30 minutos, porém o problema queria saber a quantidade de alunos que ficaram sabendo do boato no intervalo de 20 e 30 minutos. Nesse caso o Grupo 3 deveria subtrair o valor encontrados em 20 minutos dos de 30 minutos.

Na alternativa “b”, o grupo, de acordo com os valores determinados em 20 min. e 30 min., conseguiu resolver corretamente o problema obtendo como solução 40 pessoas na primeira meia hora, porém, como se percebe, o enunciado do problema dizia: “Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora? ”, e o grupo, de forma despercebida, somou 20 min. com 30 min., totalizando 50 min. observe que esse grupo não atentou para incógnita do problema.

Na alternativa “c” os alunos do Grupo 3 trabalharam com regra de três (proporcionalidade), mas não conseguiram resolver corretamente esse item, eles não conseguiram entender o enunciado desse problema da mesma forma que não conseguiram entender o enunciado do item “a”, caso eles tivessem resolvido o item “a” corretamente poderia ter seguido o mesmo raciocínio para resolver o item “c” e Polya (1995), salienta que o estudante deve considerar as principais partes do problema, atento e repetidamente, sob vários pontos de vista. E Polya (1995 p. 4) ainda diz que “é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja, estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram”.

Será feita também uma descrição da resolução desse problema, feita pelo o Grupo 2. Inicialmente apresentamos na Figura 13 a resolução feita por esse grupo.

Figura 13 – Resolução do Problema 4 feita pelo Grupo 2


I = a) Quantos alunos no período de 20 à 30 min
b) Número total de alunos que ficaram sabendo
c) Quantos minutos o boato chegou em 364 pessoas
II = 10 minutos, aumento o suporte de 3
III = Algebra
IV = Progressões
V =

10 min	$3^1 (+1)$
20 min	$3^2+3^1 (+1)$
30 min	$3^3+3^2+3^1 (+1)$
40 min	$3^4+3^3+3^2+3^1 (+1)$
50 min	$3^5+3^4+3^3+3^2+3^1 (+1$
60 min	$3^6+3^5+3^4+3^3+3^2+3^1+(+1)$

a) 27
b) 40
c) 50 min

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Esse grupo fez uma resolução totalmente diferente do grupo 3, conseguiu fazer uma tabela para representar a condicionante do problema e, com isso resolveu os todos os itens do problema errando apenas o item “a”. Na letra “a”, esse grupo, determinou um resultado errado e não conseguiu expressar de que forma eles chegaram a esse resultado. No entanto, nas alternativas “b” e “c”, obtiveram resultados corretos por meio dos valores que constituíam a tabela que eles montaram para diversos valores de tempo como pode ser observado na Figura 13.

Podemos verificar que estudantes dos Grupos 2 e 3 construíram uma figura e/ou tabela para ilustrar os dados e as incógnitas do Problema 4, de acordo com Polya (1995), se houver uma figura relacionada ao problema, ela deverá ser observada com bastante atenção e indicar a incógnita e os dados, destacando os elementos que compõem o problema e, a partir disso assim procurar resolvê-lo, com enfoque na incógnita e observando sempre suas condicionantes. Ao encontro de Polya (1995), Larson (1983, p. 9) diz “é útil descrever um problema de forma pictórica, o que pode ser meio de uma figura, um diagrama ou um grafo, e assim tornar o problema mais fácil” e isso foi feito para uma assimilação dos dados relevantes, evidenciados nas resoluções apresentadas pelos grupos.

Discussões em sala de aula

O Professor-Pesquisador pediu que um representante de cada grupo fosse até o quadro branco para apresentar a resolução do seu grupo. De acordo com as resoluções apresentadas, os grupos conseguiram resolver parcialmente esse problema, obtendo as repostas esperadas. E, foi observado que nenhum dos grupos errou totalmente o problema.

O Professor-Pesquisador deu início a uma discussão, que pode ser observada no diálogo a seguir.

> *Pp: Como se deu o “pontapé inicial” e a representação do problema? Pois vejo que teve diversas formas de representação do problema?*
> *G_5: Professor, nosso grupo construiu uma tabela, representando o tempo que cada aluno fica sabendo do boato, e colocamos a quantidade de pessoas nos respectivos tempos.*
> *G_2: Professor, nós, fizemos uma relação entre tempo e o total de alunos que já sabiam do boato, e assim sucessivamente.*
> *Pp: Vejo que vocês conseguiram evidenciar os dados e representar perfeitamente a situação-problema. Bom, percebo que faltou maior compreensão do item “a”, pois, observando as resoluções no quadro dos grupos, verificamos que todos encontraram a quantidade de alunos que ouviram o boato, e a questão pedia a quantidade de alunos que ficou sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos.*
> *Alunos: Nossa!... Professor, agora entendemos a questão [...].*
> *A_{18}: Professor, então era para ter feito a subtração do total de alunos, que ouviram o boato de 20 a 30 minutos, então a resposta seria 27 – 9 = 18 alunos.*
> *Pp: Isso mesmo, muito bom.*
> *Pp: Vejo que as alternativas “b” e “c”, todos os grupos conseguiram resolver corretamente a questão.*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Após a discussão, verificou-se que os grupos a cada problema estavam mais unidos e coesos, e acreditamos os objetivos propostos, neste encontro, foram alcançados, apesar de alguns grupos não conseguirem determinar às soluções. Entretanto, esperava-se que os alunos desenvolvessem habilidades, fazendo uso das orientações propostas pelo Professor-Pesquisador tendo por base, Larson (1983) e Polya (1995). Isso foi verificado por meio das atividades desenvolvidas e apresentadas pelos alunos, durante as exposições no quadro branco, e as discussões feitas em sala de aula com os alunos.

Polya (1995, p. 5) acreditava que " tem-se um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita". Como salienta Larson (1983, p. 2, tradução nossa) "todos os resolvedores de problemas iniciam sua análise gerando um sentimento sobre o problema, convencendo-se sobre a plausibilidade do resultado". Podemos verificar que os dois grupos aqui mencionados potencializaram suas estratégias, pois as figuras e tabelas traduzem a incógnita do problema. Que de certa forma, essa exploração de modo sistemático, e os padrões encontrados pelos grupos auxiliaram na construição ideias e de como proceder na resolução de um problema.

5º Encontro

O quinto encontro foi o último utilizando a abordagem de ensino "sobre" Resolução de Problemas. No primeiro momento, que teve o intuito de realçar as orientações de resolução de problemas propostos por Larson (1983) e Polya (1995), iniciou-se os trabalhos retomando os Problemas 3 e 4, para reelembrar elementos importantes na construção de estratégias para resolver problemas. E, logo depois, deu-se incio a resolução o problema 5, estipulando uma média 20 minutos para que os grupos resolvessem-no. Depois da resolução desse problema, foi feita, como nos encontros anteriores, uma discussão entre o Professor-Pesquisador e os alunos.

Como se sabe, a geometria é parte importante da Matemática. De acordo com as considerações da BNCC (2014), no Ensino Fundamental, o aluno deve desenvolver um pensamento que permita compreender, descrever e representar o mundo em que vive, no qual as noções geométricas possuem um papel importante para estimular a percepção das semelhanças e diferenças entre sólidos geométricos e suas respectivas planificações. Estendemos que os conteúdos do Ensino Médio é igualmente importante para desenvolver as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de busca de soluções para problemas, possibilitando o aluno a usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização, que levam à compreensão do mundo que o cerca.

Tomando como base tais orientações, propôs-se o Problema 5, visando ao estudo das formas e das planificações, bem como o deslocamento no plano e em um sólido, potencializando a visualização do aluno de objetos geométricos.

Problema 5

A figura abaixo indica um cubo de aresta a = 10 cm. Uma formiga, localizada em *A*, deseja buscar comida localizada em *B*, caminhando sobre as faces do cubo. Qual é a medida do caminho mais curto que ela pode percorrer de A até B?

FONTE: Iezzi et al (2009, p. 316).

A resolução desse problema embasado na BNCC (2014) teve o intuito de desenvolver habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano e assim formular e resolver problemas do cotidiano.

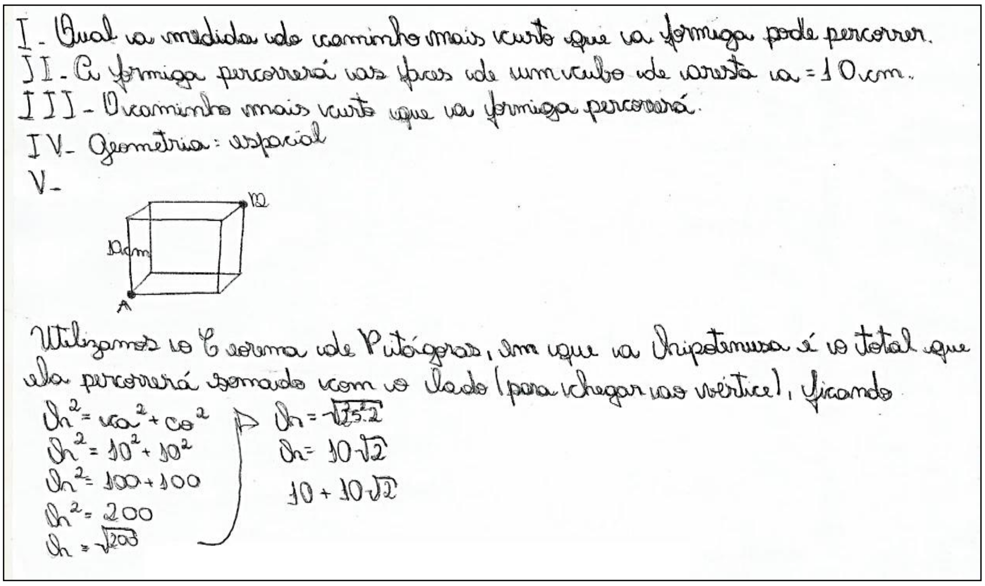
Observando as resoluções dos grupos, verificamos que nenhum grupo conseguiu interpretar com êxodo a parte do problema que abordou noções de geometria espacial. Escolhemos duas das resoluções apresentadas pelos grupos de alunos, para se proceder à análises e procurar compreender o raciocínio aplicado por eles.

Observando a resolução do Grupo 5, podemos concluir que seguiu as orientações dada pelo Professor-Pesquisador, porém, na representação, não se ateve em fazer a planificação do sólido, que poderia ser primordial no auxílio da resolução do problema. De maneira geral, o grupo seguiu perfeitamente os passos da resolução, e aplicou o teorema de Pitágoras corretamente, todavia eles calcularam a diagonal da face do cubo, mas não somaram com a aresta, por não perceber que o ponto B estava em outra face que não pertencia ao plano da diagonal procurada.

Essas duas resoluções escolhidas demonstram perfeitamente que alguns conceitos matemáticas estão bem fixados pelos estudantes, porém não conseguiram entender o problema que procurava o menor trajeto que a formiga percorreria entre A e B. A maioria dos grupos deduziu que a formiga deveria percorrer a diagonal de uma base ($a\sqrt{2}$) mais uma aresta (a) e chegar ao vértice oposto, considerando que ela esteja na superfície e assim calculando o comprimento do trajeto que a formiga deverá percorrer pela superfície até chegar ao vertice oposto do cubo.

Resolução desse problema, feita pelo Grupo 5, como mostra a Figura 14.

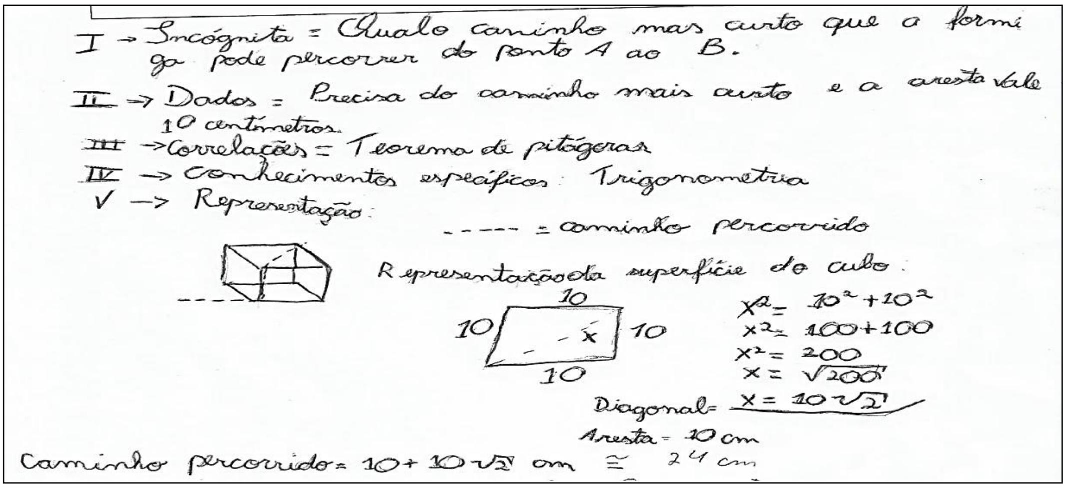
Figura 14 – Resolução do Problema 5 feita pelo Grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Faremos também a descrição feita pelo Grupo 6, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Resolução do Problema 5 feita pelo Grupo 6



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Na resolução desse problema, por sua vez, observa-se que esse Grupo 6 também seguiu as orientações propostas como estratégias de resolução, construindo a representação do sólido e, porém, ele fez a representação do cubo, considerando um único quadrado, isto é, desconsiderou as outras faces do cubo, faces essas que seriam imprescindíveis para a resolução do problema. Assim, os alunos desse grupo não conseguiram perceber que somente o valor de uma das diagonais não corresponderiam á distância entre os pontos A e B, a formiga deveria percorrer.

Nesse problema, nem um do grupo conseguiu sucesso na resolução da atividade, porém durante a correção da atividade, verificou-se que nem um grupo pensou na planificação do sólido para concluir a questão, pois, como a formiga caminha sobre as faces, bastava que se planificasse a superfície do cubo e unir A e B por um caminho em linha reta, assim chegando à conclusão do problema verificando o menor trajeto de A e B.

Discussão

O Professor-Pesquisador pediu que um representante de cada grupo fosse até a lousa para colocar a resolução do problema para dar início às discussões acerca das soluções.

> *Pp: Vejo que tivemos dois resultados que foram $20\sqrt{2}$cm e 10 + 10 $\sqrt{2}$ cm. Bom, vamos ouvir o que os grupos fizeram para obter esse resultado.*
> *G_4: Professor, nosso grupo considerou a aresta do cubo de 10 cm, calculamos a diagonal de uma das faces do cubo e, aplicando o teorema de Pitágoras, chegamos no valor de 10 + 10 $\sqrt{2}$ cm.*
> *Pp: Certo!*
> *G_3: Professor..., fizemos do mesmo jeito do G_4, porém o nosso deu $20\sqrt{2}$cm, a distância percorrida pela formiga.*
> *Pp: Bom..., os demais grupos vejo que seguiram um ou outro exemplo desse que foi citado pelo G_4 e pelo G_3.*
> *Pp: Voltando à incógnita do problema percebemos que determiná-la significa encontrar a menor caminho percorrido pela formiga de A até B.*
> *G_4: Professor, nós fizemos a representação da superfície do cubo e calculamos o valor da diagonal.*
> *Pp. Bom, meninos, observados e analisados os argumentos de vocês, vejo que faltou um pouco de compreensão durante a planificação do cubo. (...)*
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018)*

Após esse diálogo, o Professor-Pesquisador se dirigiu à lousa refez esse problema juntamente com os alunos, observando sempre as orientações sugeridas por Larson (1989) e Polya (2006). E, na representação, ele fez a planificação da superfície do cubo e traçou uma semirreta ligando os pontos A e B para representar o caminho percorrido pela formiga.

Neste último problema da primeira etapa do Projeto de Ensino observamos uma experiência bastante diferente, pois envolveu geometria espacial, a qual poderia se a planificação do sólido e ainda utilizar o teorema de Pitágoras. Durante a formalização deste problema, pelo Professor-Pesquisador, as várias dúvidas do grupo e o porquê de eles chegaram em tal solução, trouxe um debate enriquecedor para este encontro, culminado na finalização do ensino “sobre” Resolução de Problemas, porém, vale destacar que em qualquer abordagem esse processo de desenvolvimento de habilidades pode estar presente e sempre ser explorado pelo professor.

6.2.2 Ensino "Através" de Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao ensinar através da resolução de problemas, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio de fazer. Diante disso, nessa abordagem, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender matemática, mas também como principal meio de fazer matemática, introduzindo-se conceitos, conteúdos ou procedimentos novos.

6º e 7º encontros

Nestes encontros, fizemos um trabalho dentro da segunda abordagem de Resolução de Problemas, cujo objetivo não é mais desenvolver habilidades dos estudantes, mas levá-los a conceber um conhecimento novo. E os novos conhecimentos a serem concebidos eram sobre logaritmo e função logarítmica, juntamente com o conhecimento de outros conceitos necessários à compreensão desses conteúdos. O Professor-Pesquisador iniciou esse encontro com a proposição de um problema em que se faz necessário o uso dos logaritmos para resolvê-lo, e, durante a condução dessa atividade, ele fez alguns questionamentos aos alunos com a intenção de conduzi-lo na direção da solução.

Problema 1
Para cada caso, encontre um valor para x que satisfaça a igualdade estabelecida a seguir:
a) $2^x = 4$
b) $2^x = 8$
c) $10^x = 1000$
d) $10^x = 10000$
e) $2^x = 5$
f) $10^x = 8000$
g) $10^x = 990$

Fonte: Dante, (2013, p. 175).

Nesse 1º encontro da segunda etapa, o professor pesquisador deu um tempo de aproximadamente de 20 minutos para que os alunos resolvessem esse problema, e logo após, a resolução feita pelos alunos, foi feita a plenária buscando envolver toda a turma e alguns questionamentos acerca da resolução da atividade proposta.

A seguir, apresentamos parte do diálogo ocorrido durante a plenária.

Pp: Qual foi a principal dificuldade encontrada para resolver os itens e, f e *g que vocês não tiveram ao resolver os itens de a* a *d?*

A_5: Ah! Professor como elevar dois a algum número que dá cinco, pois verificamos que um número de base dois sempre será um múltiplo de dois.
A_{16}: Não existe não, ou será que é um número decimal! Sei não, viu...
A_1: Tentamos muitos valores para "x" em todas alternativas, porém os valores eram próximos e distanciados, entendeu?
(Diálogo entre professor e aluno, 2018).

O objetivo desse questionamento era fazer com que os alunos percebessem que a impossibilidade de encontrar um valor de x para essas situações que ocorreram, porque 5 não é potência inteira de 2 e 8000 e 990 não são potências inteiras de 10. No entanto, ele poderia ser escrito por uma somatória de potências de 2 ou de 10.

O Professor-Pesquisador continuou instigando os alunos atentarem solucionar o problema e descobrirem alguns detalhes sobre as soluções das equações apresentadas nos itens e), f) e g), por exemplo, se existe algum valor próximo da solução, ou entre quais valores inteiros se deve buscar a solução. Dessa forma, o objetivo foi, no item e), que os alunos percebessem que *x* deve estar entre 2 e 3. No item f), esperava-se que eles percebessem que *x* deve estar entre 3 e 4. E, no item g), o esperado é que eles percebessem que *x* deve estar bem mais próximo do 3. Pois a intenção de trabalhar com esse Problema fosse um problema fechado.

Problema 2

Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América latina vai dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Fonte: DANTE (2013, p. 177).

Após os estudantes resolverem esse problema, foi feita a plenária pelo Professor-Pesquisador juntamente da turma, utilizando as estratégias desenvolvidas durante o ensino "Sobre" Resolução de Problemas. Diante do processo de desenvolvimento das heurísticas foi evidenciado uma possível estratégia para resolução desse problema. O professor fez a leitura com a turma, logo depois, seguiu-se um diálogo na perspectiva da construção de um processo heurístico. Parte desse diálogo é apresentado a seguir.

Pp: Qual é a incógnita do problema?
Alunos: Em quantos anos a população da América Latina levará para dobrar, se mantiver a taxa de crescimento.
Pp: Qual, ou quais, dados são importantes para se chegar à solução?

Alunos: Crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente.
Pp: De que se trata esse problema?
Alunos: Crescimento demográfico e porcentagem.
Pp: Qual conteúdo envolvido nesse problema?
Alunos: Porcentagem, função exponencial e equações exponenciais (...)
(Diálogo entre professor e aluno, 2018).

Ao término desse diálogo, foi feita, na lousa, uma tabela para organizarmos os dados do problema para evidenciar uma das partes mais importante no processo de resolução de acordo com Larson (1987) e Polya (1995), a Representação, como é mostrado a seguir.

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_o * 1,012$
2 anos	$P_2 = (P_o * 1,012) * 1,012 = P_o * (1,012)^2$
3 anos	$P_3 = P_o * (1,012)^3$
...	...
x anos	$P_x = P_o * (1,012)^x$

Feita a representação, observou-se que, se a população dobrar após x anos, podemos escrever:

$$P_x = 2 * P_o, \text{ equivalentemente, } Po\,(1,012)^x = 2.Po \Leftrightarrow (1,012)^x = 2$$

Como se pode observar, essa situação nos remete à um pensamento similar ao do Problema 1 deste encontro, no qual tinha-se base diferente e que um não podia ser escrita como potência da outra, e, assim, não era possível determinar o valor de *x* usando os conhecimentos adquiridos, por eles, nas séries anteriores. A partir disso, com o objetivo de transformar uma equação exponencial, como essa, em uma igualdade de potências de mesma base, o Professor-Pesquisador formalizou o conceito de Logaritmos.

Para produzir significado para o conceito novo introduzido, o Professor-Pesquisador iniciou com uma apresentação histórica, seguida pela apresentação de uma definição de logaritmos, a partir da resolução de equações exponencial e suas aplicações, bem como as mudanças que teve, desde quando foi pensado como um facilitador de cálculos e métodos para resolver problemas complexos.

Após essa apresentação, a definição formal de logaritmos, condição de existência e consequências da definição, foram propostos alguns exercícios para que os estudantes pudessem fixar os conceitos aprendido.

8º encontro

6.2.3 Ensino "Para" de Resolução de Problemas

Neste encontro, o Professor-Pesquisador e a Professora-Colaboradora continuaram as atividades de fixação de conteúdo que foram distribuídas no sexto e sétimo encontro que se encontram, na íntegra, nos Apêndice A – Projeto de Ensino, e auxiliaram os estudantes durante toda a resolução das atividades.

Logo depois, foi pedido aos alunos que viessem até lousa e colocassem as respostas das atividades propostas.

Figura 15– Resolução da Lista 1 de Atividades no quadro e o Professor-Pesquisador

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

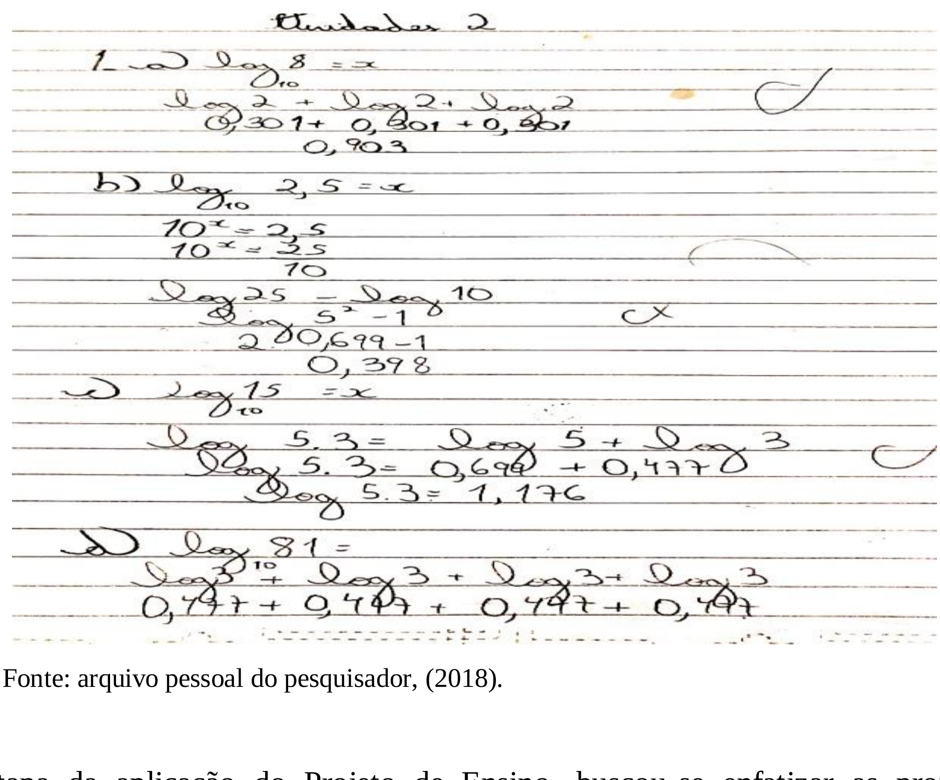
O objetivo deste encontro, durante a correção das atividades, foi o de fazer uma sondagem da turma, para verificar se os estudantes, depois da introdução de conceitos feita "através" da

Resolução de Problemas, ainda demonstravam dificuldades para compreender o conceito de logaritmos, incluindo as condições de existência e as consequências imediatas da definição, ou seja, propriedades. Nessa última etapa, buscou-se explorar, principalmente, a aplicação do conhecimento de logaritmos na resolução de problemas, com isso, deu-se início a terceira abordagem evidenciada por Schroeder e Lester (1989), um ensino "para" resolver problemas.

9º encontro

Neste encontro continuou-se a abordagem "para" resolver problemas. Para isso, revisou-se os conceitos relativos à logaritmos enfatizando suas propriedades operatórias. E, logo depois da formalização e da explanação, foi proposta a segunda lista de atividades, cujo objetivo era levar os alunos a fixarem seus conhecimentos às propriedades operatórias de logaritmos– um dos motivos do ensino "para" resolver problemas. E, ainda, buscou-se aplicações em outras áreas de conhecimento. Na Figura, a seguir, são apresentadas uma das resoluções dessas atividades feita pelos alunos.

Figura 16 – Resolução da Lista 2 de Atividades



Fonte: arquivo pessoal do pesquisador, (2018).

Nessa etapa da aplicação do Projeto de Ensino, buscou-se enfatizar as propriedades operatórias de logaritmos cujo teve como objetivo principal a fixação dos conceitos dessas propriedades fazendo uso da abordagem de Ensino "Para" Resolução de Problema. Pode-se perceber que os estudantes de maneira geral compreenderam as propriedades e suas aplicações a partir das discussões feitas e sala de aula, durante o desenvolvimento das atividades e com a lista de atividades recolhidas pelo Professor-Pesquisador.

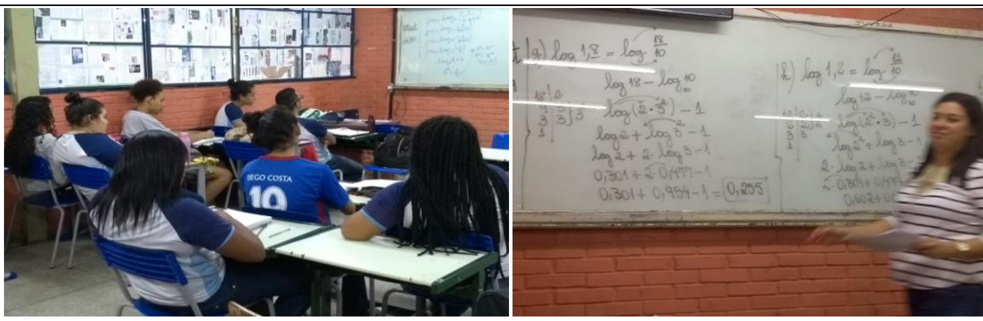
10º encontro

Neste encontro, o Professor-Pesquisador e a Professora-Colaboradora pediram que os estudantes continuassem a resolução das atividades anteriores. E, durante a resolução dessas atividades, os professores auxiliaram os estudantes, porém assumindo um papel de mediador, ou seja, não dizendo ao aluno o que eles deveriam fazer, mas questionando-os de forma que eles mesmos pudesse encontrar o caminho que os levassem a solução de cada tarefa proposta.

Neste encontro, o Professor-Pesquisador reservou um tempo no final da aula para que se fizesse uma discussão das resoluções dos alunos, por meio de uma plenária, com objetivo de para fixar os conceitos envolvidos nas atividades, tirar algumas dúvidas que ainda existissem, e orientar os alunos a corrigirem suas tarefas e compreendesse os erros cometidos.

Na Figura 17, tentamos ilustrar o ambiente no momento em que se deu este encontro, bem como a resolução apresentada na lousa, durante a plenária.

Figura 17 – Resolução e Correção da Lista 2 de Atividades pela Professora-Colaboradora na lousa



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

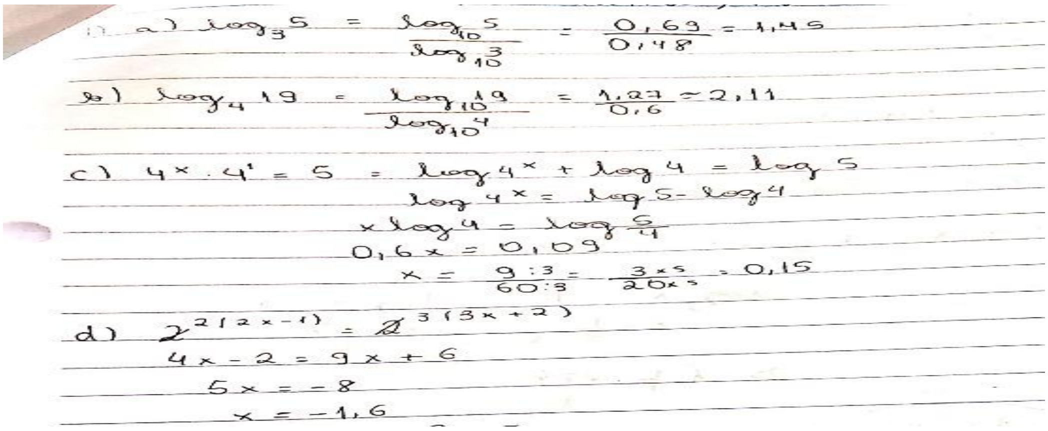
Na Figura 17 vê-se a Professora-Colaboradora fazendo a correção das atividades em plenária juntamente aos alunos, e o Professor-Pesquisador auxiliando individualmente na correção e verificação das atividades. Neste encontro, o Professor-Pesquisador e a Professora-Colaboradora trabalharam em conjunto durante todas as atividades.

Encontros Finais

Os encontros finais (décimo primeiro, décimo segundo, décimo terceiro, décimo quarto e décimo quinto) foram destinados à resolução de problemas e exercícios em sala de aula, com auxílio dos professores, buscando trabalhar as três abordagens de Resolução de Problema, primeiramente propunha-se um trabalho através da Resolução de Problemas (primeira abordagem) em que, durante a resolução por parte do aluno, promovia-se um processo heurítico para desencadear a produção de estratégias(segunda abordagem) e, por último, eram propostos novos problemas para que os estudantes aplicassem conhecimentos relativos ao tema proposto com objetivo de fixar conhecimento e produzir novos significados para objetos matemáticos.

Na Figura 18, apresentamos uma das atividades desenvolvidas por estudantes, nesta última etapa.

Figura 18 – Resolução da Lista 3 de Atividades



Fonte: arquivo pessoal do pesquisador, (2018).

Percebe-se que nessa última etapa, na qual trabalhamos com a mudança de base e algumas equações logarítmicas, alguns alunos demonstraram certa difilculdades em alguns exercicios da lista 2, porém os professores pesquisador e colaboradora, intervinham diretamente e individualmente cada aluno, como Polya salienta que “o professor deve colocar-se no lugar do aluno, percedber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante (1995, p. 1)” e assim solucionar tais dúvidas.

As atividades dessa última etapa, configurado em materiais produzidos pelos alunos, cujo um exemplo é colocado na Figura 18, teve, dentre o que já foi mencionado, o intuito de levar os estudantes a pensar matematicamente, evidenciando suas ideias matemáticas, estabelecendo relações entre essas ideias, desenvolver sua capacidade de comunicar-se, por meio da fala, de forma argumentativa, suas concepções, consequentemente, desenvolvendo formas de raciocínio e conexões entre temas matemáticos, desencadeando um aumento da sua capacidade de resolver problemas, como foi proposto na primeira etapa do nosso plano de ensino. Em consonância com Polya (1995) que afirma que o estudante assimilando bem algumas questões, será capaz de apresentá-las a si próprio no momento apropriado e de realizar, natural e vigorosamente, a operação mental correspondente como podemos observar nas resoluções apresentadas nas figuras 17 e 18.

Para ilustrar o ambiente promovido pelo comportamento individual dos estudantes, apresentamos algumas fotos da sala de aula, tiradas nesses últimos encontros, por meio da Figuras 19.

Figura 19 – Resolução de uma Situação Problema para Construir a Ideia de Função Logarítmica

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Na primeira etapa da aplicação do Projeto de Ensino foram propostas algumas equações que não seria possível resolver simplesmente observando a igualdade de potências e aplicando propriedades da potenciação. Porém, nesses últimos encontros da pesquisa de campo, o Professor-Pesquisador retomou essas atividades, dessa vez de posse de novo conceito, logaritmos, e suas propriedades. A partir disso, com a participação de todos, foram resolvidas essas equações com o uso desse novo conhecimento. Novos problemas nessa linha foram propostos, ou seja, dessa vez objetivava-se identificar problemas e equações em que seriam necessários recorrer à definição e propriedades de logaritmos. E, isso se constitui a vertente apresentada na segunda etapa do nosso plano de ensino, o ensino "para" Resolução de Problemas.

Os resultados obtidos durante a aplicação do Projeto de Ensino, que fez uso das três abordagens de Resolução do Problema; o ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas”, e “através Resolução de Problemas”; foram promissores e gratificantes, proporcionando em sala de aula reflexões e práticas significativas.

Assim, ficou devidamente correlacionada a ideia de como se trabalhar questões matemáticas, utilizando Resolução de Problemas, desenvolvendo nos alunos potencialidades advindas de um pensamento ativo e reflexivo, evidenciando e melhorando suas capacidades e habilidades para aprendizagem matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluindo nossa pesquisa, pautada no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, chegamos agora na parte final do terceiro bloco. Nesta última parte, retomamos à pergunta de pesquisa, apresentamos as conclusões observadas ao longo desta investigação, segundo Romberg (2007), ou seja, antecipando a ação de outros pesquisadores.

Em busca de responder a pergunta norteadora dessa pesquisa, ***"Como um Ensino "sobre Resolução de Problemas", "para Resolução de Problemas" e "através Resolução de Problemas" poderia contribuir para a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e de função logarítmica?"***, buscou-se inúmeras contribuições de pesquisadores da área de Matemática e de Educação Matemática, bem como de professores do próprio Instituto Federal de Goiás e de outras instituições. Ademais, a elaboração e aplicação de um Projeto de Ensino, em "sala de aula" para o levantamento de evidências foram primordiais para que esta pesquisa se realizasse e a pergunta da pesquisa fosse respondida.

Incialmente nossa proposta era de um ensino através da Resolução de Problemas, porém tivemos dificuldades em implementá-la, pois os alunos da turma investigada não tinham o hábito de trabalhar com resolução de problema. Essa situação pode ser visualizada, não apenas nessa turma, mas de uma maneira generalizada, ou seja, a forma com que o ensino de Matemática se apresenta nas instituições não habilita os estudantes para resolver problemas. De fato, não se tem um trabalho, em sala de aula, voltado para a leitura e a interpretação de terminologias e simbologias matemáticas, bem como uma relação entre a linguagem matemática com a linguagem vernácula que seja capaz de preparar o aluno para ler e interpretar o enunciado de um problema, tampouco são discutidas estratégias que auxiliem no desenvolvimento dos alunos sobre como pensar e como elaborar ou, escolher, um caminho para resolver um problema de matemática.

Com isso, vimos a necessidade de preparar os alunos para trabalhar com Resolução de Problemas. Assim, propomos um ensino "sobre" Resolução de Problemas afim de desenvolver habilidades, nos alunos, para produção de estratégias necessárias para a resolução problemas de matemática. No primeiro momento dessa etapa, tivemos certa rejeição e resistência dos alunos para aceitar essa nova forma de ensino. Isso é de certa forma compreensível, pois essa nova proposta de trabalho exige muito do aluno, ou seja, o aluno precisa se tornar um agente ativo do processo de ensino-aprendizagem para que se obtenham bons resultados. Tirar um estudante da passividade exige dele uma participação efetiva e uma aceitação de responsabilidades sobre sua aprendizagem. E responsabilidade é algo que as pessoas assumem por meio de negociação, com algum retorno evidente, ou por imposição sob promessa de alguma penalidade. Neste sentido, todo professor que deseja levar uma nova metodologia para a sala de aula, precisa ter consciência desse processo de aceitação dos estudantes, para isso ele precisa de bom um planejamento para conseguir fazer essa implementação. Diante disso, gostaríamos de salientar que, nesse planejamento, é fundamental que o professor busque incentivar e cativar seus educandos afim de levá-los a se envolver e participar dessa nova proposta de ensino.

Feito isso, partimos para a construção dos conceitos relacionados aos logaritmos, utilizando um ensino "através" da Resolução de Problemas. Os processos e técnicas para desenvolvimento de habilidades necessárias para resolver problemas, feitos por meio de um trabalho "sobre" resolução de problemas, já citado, permitiu aos estudantes uma participação ativa nesta nova etapa. Essa participação foi evidenciada, inclusive intensificada nas discussões entre os estudantes ocorridas durante as plenárias propostas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esta etapa é de extrema importância para o ensino e aprendizagem de matemática, pois é nela que se introduz novos conceitos, conteúdos e procedimentos, e se busca a construção de conhecimentos desses entes, de forma que a aprendizagem do que se propõe se consolide.

A matemática precisa ter, ou fazer, sentido para os estudantes, pois assim eles poderão ser levados à pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas e comunicar-se ao falar e escrever sobre elas. Além disso, poder desenvolver formas de raciocínios e estabelecer conexões entre temas matemáticos, ou não matemáticos. Diante disso, é necessário que os conhecimentos adquiridos durante as aulas sejam fixados e ganhem novas dimensões por meio do seu uso, em problemas práticos do dia a dia ou em novos problemas de matemática. Para que isso pudesse se consolidar, fizemos um trabalho na vertente do "para Resolução de Problemas", proposto por Schroeder e Lester (1989), por intermédio de um conjunto de atividades desenvolvidas para este fim. Nessa esteira, qualquer metodologia de ensino precisa sempre buscar, após a construção de conhecimento, fazer um desdobramento que permita ao estudante fixar os conhecimentos adquiridos, bem como visualizar esses conhecimentos no seu dia a dia e dentro do próprio contexto da matemática, em outros conteúdos, ou até mesmo em outras áreas de conhecimento.

Oportunizamos em nossa pesquisa que os estudantes, ao resolver problemas e atividades de fixação em sala de aula, se engajassem nas três etapas propostas no plano de ensino, ou seja, resolvessem problemas compartilhando ideias, quando trabalharam em grupo ou durante as plenárias na discussão das atividades. Isso tornou a compreensão dos conceitos estudados mais profundo e duradouro, levando os estudantes a conhecer a matemática por um outro ponto de vista.

Ressaltamos que quando se propõem ensinar a partir de Resolução de Problemas não há dúvida de que será uma tarefa difícil. As atividades a serem trabalhadas em sala de aula precisam ser bem planejadas e os bons problemas devem ser selecionados, sempre levando consideração a compreensão dos alunos e as necessidades de atender o conteúdo programático.

Assim, tomando como referências as evidências coletadas em nossa pesquisa, acreditamos fortemente que as abordagens de ensino que faça uso da Resolução de Problemas constituem-se num bom caminho alternativo, possibilitando ao estudante a aquisição de conhecimento de conceitos e conteúdos matemáticos, ampliando seu próprio potencial e de suas próprias habilidades. Para os professores, esse tipo de ensino lhe servirá como base para a construção de uma metodologia mais eficiente para sua prática docente, possibilitando seu aluno a utilizar Resolução de Problemas não só para aplicar, mas também para aprender a matemática.

O que vem depois...

O trabalho aqui desenvolvido não deve acabar ao terminarmos esta dissertação. Quero continuar na área de pesquisa com o uso da Resolução de Problemas, com um pensamento voltado para uma nova pesquisa, dessa vez em nível de doutorado. Estou me preparando como pesquisador para continuar o desenvolvimento de pesquisas, usando para isso a minha sala de aula, com meus alunos da Educação Básica, em nível ensino Fundamental e Médio.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p.35 – 52.

ALVES, M. P.; MORGADO, J. C. **Avaliação em Educação: políticas, processos e práticas**. 1 ed. Coimbra, De Facto editores, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática** Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 2012.

______. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum – BNCC**. Brasília: MEC, 2018, p. 527 – 546.

CHIZZOTTI, A. **A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios**. **Revista portuguesa de educação**, 2003/vol.16, número 002. Universidade do Minho Braga, Portugal. p. 221-236.

DAMIANI, M. F. **Sobre pesquisas do tipo intervenção**. **XVI ENDIPE** – Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino - UNICAMP - Campinas – 2012. "Disponível em:‹http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/2345b.pdf›. Acessado em: 25 de agosto de 2017".

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12ª ed. 2ª imp. São Paulo: Ática, 2002.

______Didática da Resolução de Problemas de matemática. 1ª a 5ª séries. Para estudantes do curso Magistério e professores do 1º grau. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2003.

______. Matemática: contexto & aplicações - 1ª série do Ensino Médio**:** 2ª ed. - São Paulo: Ática, 2013 obra em 3 v.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingos. – Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2004. 3ª reimp., 2008.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática.2017**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas campus de Rio Claro, São Paulo, 2017.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L.E.; MARTINS, E.R. **Resolução de problemas no Ensino Superior**, In. ONUCHIC, L. R.; JUNIOR L.C.L.; PIRONEL, M. (Orgs.). Perspectiva para Resolução de Problemas – São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2017.p.189-246.

FERREIRA, N. C.; PEREIRA, J.C.S.; LEMOS, G. C. **Heurística de Resolução de Problemas: aspectos do ensino sobre resolução** – Revista: Conspiração – Professores que Ensinam Matemática- SBEM/MT, 2018.

IEZZI, G. [et al.]; **Matemática: Ciência e aplicação**, 1ª série do Ensino Médio – 2. ed. – São Paulo: Atual, 2004.

KAUARK, S. F.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia de Pesquisa: um guia prático**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

LARSON, L. C. **Problem-Solving Through Problems. Springer**, New York, 1983.

MORAIS, R. Dos S.; ONUCHIC, L. R.; Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014.p. 17 - 34.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de Matemática básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete -** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas campus de Rio Claro, São Paulo, 2014.

PECORARI, M. **Logaritmos e Aplicações**- Rio Claro: [s.n.], 2013.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimp. - Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação** – São Paulo: Atlas, 1987.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA- Boletim de Educação Matemática,** v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F.C.H.; A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014.p.53-68.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr.,F.K. Developing Understanding in mathematics via Problem solving, In. TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics Reston: NCTM**, 1989 (Year Book).p.30-42.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e o Método de Pesquisa. Tradução: Onuchic, L. R.; Boero, M. L. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n. 27, p. 93–139, 2007. p. 93-139.

APÊNDICES

APÊNDICE A - PROJETO DE ENSINO

Este Projeto de Ensino é parte de uma pesquisa em nível de mestrado, que tem por objetivo construir uma metodologia de ensino que faça uso da Resolução de Problemas, construírem conhecimentos relacionados a conceitos de Logaritmos e de Função Logarítmica. Buscando atingir esse objetivo, este Projeto de Ensino se divide em três partes: um ensino "sobre" Resolução de Problemas – que desenvolverá no estudante a capacidade de criar estratégias a fim de resolver problemas de matemática; um ensino "através" da Resolução de Problemas – o qual levará o estudante a construir conhecimentos de matemática a partir de problemas; e, um ensino "para" Resolução de Problemas – aquele capaz de desenvolver no estudante habilidades para que ele consiga aplicar, tanto em problemas reais quanto teóricos a matemática que ele aprendeu.

Definição dos sujeitos da pesquisa

Neste processo, serão usados alguns termos técnicos, os quais serão destacados a partir daqui para que, doravante, utilizem-se apenas as expressões técnicas do campo da pesquisa científica sem que haja a necessidade de reiterar continuamente a especificação de quem é quem no processo de condução do Projeto de Ensino.

Assim, a expressão *"Professor-Pesquisador"* referir-se-á ao pesquisador enquanto professor durante a aplicação deste Projeto de Ensino em sala de aula. O termo *"professora-colaboradora"*, por sua vez, indicará a professora de matemática da turma na qual será aplicado este plano de ensino. Finalmente, a palavra *"alunos"* diz respeito a todos os estudantes do 1º ano "C", do Ensino Médio, no Colégio Estadual de Período Integral – CEPI – José Salviano Azevedo.

Parte I – Ensino "sobre" Resolução de Problemas

Essa abordagem, de acordo com Schroeder e Lester (1989), refere-se ao modelo apresentado por Polya em seu livro *How to Solve it* (traduzido para português como "A Arte de Resolver Problemas" ou uma variação dele). Tal forma de ensinar objetiva desenvolver as habilidades dos estudantes em resolver problemas. Nesse sentido, Polya apresenta três fases as quais ele afirma serem usadas por especialistas em resolver problemas, quais sejam: idealizar um plano, executá-lo e observar o caminho inverso usado na resolução do problema. Entretanto, para alcançar tal objetivo, o professor precisa ensinar estratégias ou heurísticas que auxiliarão na resolução desse problema.

Como estratégia, alguns trabalhos, como os de Polya (1995) e de Larson (1983), sugerem que se busque identificar alguns itens no universo do problema. Assim, o primeiro desses itens é a incógnita, entendida como o que se deve procurar; o que é que se quer determinar; do que é que se precisa para se chegar à solução. O segundo item são os dados, ou seja, informações úteis ou necessárias; valores ou outros objetos relevantes para a resolução do problema. O terceiro item são as correlações, isto é, do que se trata; qual a área de conhecimento; com o que se parece; que relação existe com outro problema ou com outra situação já trabalhada. O quarto item nessa proposta são os conhecimentos específicos, isto é, os conteúdos envolvidos; os raciocínios necessários; os procedimentos a serem realizados, os conceitos essenciais etc. Por fim, o último item é a representação, assim denominada por se tratar da imagem mental ou escrita da correlação das informações apresentadas no problema; figuras, equações, inequações, funções, etc. capaz de explicitar os dados do problema; e, qualquer outra representação matemática ou simbólica dos dados que ajude no entendimento e/ou resolução do problema.

É importante ressaltar que os cinco elementos supracitados fazem parte de uma ideia inicial, tendo por objetivo incitar o estudante a sair da inércia e ter um ponto de partida para raciocinar acercado problema, consequentemente, não deixando de trabalhar o problema por não saber por onde começar. Assim, não importará se o estudante deixar de explicitar um desses elementos ou apresentar algum deles de maneira errada, visto que o importante é a promoção de condições para que o aluno tenha um pensamento ativo e reflexivo sobre o problema. Esses pensamentos e atitudes poderão desencadear operações mentais, denominadas por Polya (1995) de “Heurísticas Modernas”, capazes de levar o estudante a desenvolver alguma estratégia para resolver o problema.

Outro fator que deve ser observado é que, em um problema de natureza didática, o resultado não é o ente mais importante do processo, pois, como não se trata de um problema real, um resultado errado não trará prejuízos. Nesse caso, em um problema de natureza didática, o mais importante é fazer com que o estudante se desenvolva cognitivamente e aprenda matemática. Com foco no objetivo proposto, neste Projeto de Ensino espera-se desenvolver no estudante a capacidade de criar estratégias para resolver problemas de matemática, então a proposta inicial é de trabalhar três encontros de 1 hora e 40 minutos cada. Nas partes dois e três deste projeto, durante o ensino *através e para resolução de problemas*, o estudante continuará sendo incentivado a desenvolver estratégias para resolução de cada problema trabalhado nessas etapas.

1º. Encontro

No primeiro encontro, será feita uma apresentação desta proposta de ensino. Durante a apresentação, explicar-se-ão aos alunos a forma de trabalho a ser desenvolvida durante todo o processo bem como o papel de cada um dos integrantes (Professor-Pesquisador, professora-colaboradora e alunos) nesse trabalho. Em seguida, serão apresentados aos alunos o Termo de Compromisso, Responsabilidade e Consentimento de Participação e o Termo de Consentimento livre e Esclarecido - TCLE, que se encontra no Apêndice **A**, para ser discutido e aprovado, com as devidas modificações, se for o caso.

Objetivos Específicos

- Apresentar aos alunos como o Professor-Pesquisador pretende desenvolver este Projeto de Ensino;
- Conseguira anuência dos alunos em participar desse processo de investigação por meio de um termo de compromisso e responsabilidade e consentimento, junto aos pais, de sua participação;

2º. Encontro

Nesse encontro, pretende-se auxiliar os alunos a desenvolver algumas estratégias com o intuito de desenvolver habilidades para resolver problemas. Será, portanto, entregue a cada um o seguinte problema, logo após pedimos que os alunos formassem grupos de 4 pessoas para desenvolver e resolver o problema 1.

Problema 1[12]: Um terreno retangular mede 36 m de comprimento por 21 m de largura. O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores, plantadas a iguais distâncias umas das outras, e quer manter entre as árvores a maior distância e o maior número de árvores possível, e a distância entre elas deve ser um número inteiro. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual deverá ser a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

[12]Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 34) *apud* Noguti (2014, p. 226).

Pretende-se levar o aluno a desenvolver habilidades para resolver problemas, e a capacidade de criar estratégias.

Uma possível forma de desenvolver estratégias para resolução do Problema 1:

I. *Incógnita do problema:* qual será a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

II. *Dados*: o terreno é retangular e mede 36 m de comprimento por 21 m de largura; o terreno deverá ser cercado com árvores plantadas a iguais distâncias umas das outras; deve-se manter entre as árvores a maior distância possível; o número de árvores plantadas deve ser o maior possível; a distância entre as árvores deve ser um número inteiro (em metros);

III. *Correlações:* Geometria plana e aritmética;

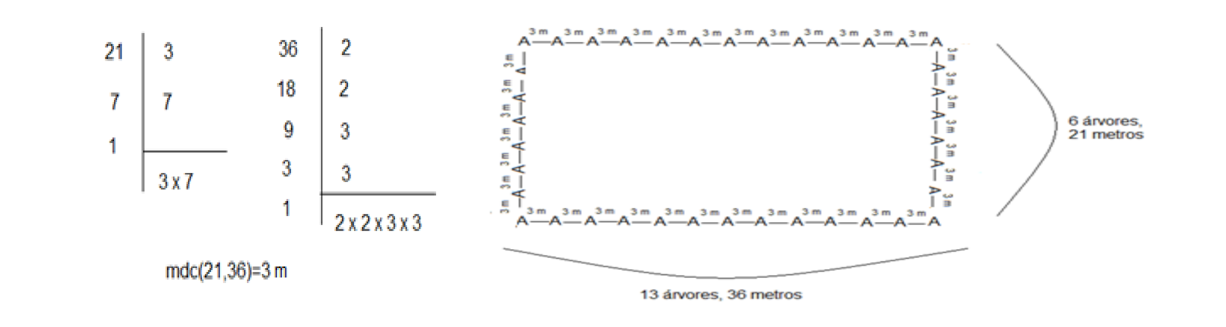
IV. *Conhecimentos específicos*: retângulo, máximo divisor comum e perímetro;

V. *Representação:* desenhar um retângulo e desenhar as árvores.

Se escolhêssemos plantá-las mantendo um metro de distância entre as árvores, seriam plantadas 37 árvores no comprimento, totalizando 74 árvores (contando os dois lados paralelos com as árvores dos cantos) e 20 árvores na largura, totalizando 40 árvores (também contando os dois lados, sem as árvores dos cantos, que já foram contadas). Pode-se faça uma figura caso haja alguma dúvida. Se escolhêssemos dois metros de distância entre as árvores, no comprimento conseguiríamos plantar 19 árvores em cada lado do comprimento, totalizando 38 árvores (contando os dois lados paralelos e as árvores dos cantos), porém na largura não conseguiríamos manter o padrão de dois metros devido a 21 não ser múltiplos de 2. Se colocássemos a distância entre as árvores com três metros, teríamos 13 árvores plantadas no comprimento totalizando 26 árvores (contando os dois lados paralelos e as árvores dos cantos) e 6 árvores na largura, totalizando 12 árvores considerando os dois lados, sem contar as árvores dos cantos, que já foram contadas. Se mantivéssemos o padrão de distâncias entre as árvores, poderíamos observar baseado nos casos simulados anteriormente, que a distância entre as árvores deverá ser um divisor de 36 e de 21. Logo, essa distância não poderá ser 2, 4, 5, 6,7 nem 8. Assim deverá ser apenas 1, 2 ou 3.

Portanto, a maior distância possível entre as árvores é o maior divisor comum entre 21 e 36, que é 3. O Quadro 1, a seguir, ilustra essa situação.

Quadro 1 – Quadro resolução e representação do Problema 1



Fonte: Cálculo do máximo divisor comum entre 21 e 36, Noguti, (2014, p. 226).

Portanto, a maior distância entre as árvores será 3 m e o total de árvores será:

= 6 + 6 + 13 + 13 = 38 árvores.

Na sequência, será proposta, ainda no segundo encontro, o problema 2 com o intuito de promover condições para que os alunos tenham um pensamento ativo e reflexivo sobre esses problemas e, consequentemente, desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Problema 2[13]: Ivete decidiu doar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta por menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade dessa coleção para o hospital e manter 10 livros favoritos. Ela vai dividir igualmente os livros restantes entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis.

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do Problema 2:

I. *Incógnita do problema:* Quantos livros podem estar na coleção de Ivete?
II. *Dados:* sua coleção é composta por menos de 100 livros, ela está planejando dar a metade para o hospital e manter 10 livros e assim dividir o restante com quatro amigos;
III. *Correlações:* Álgebra e aritmética;
IV. *Conhecimentos específicos:* Operações Numéricas e Equações;
V. *Representação:* Tabela.

Inicialmente, deve-se construir um quadro com os dados do problema. Para isso, pode-se começar escolhendo uma quantidade qualquer, menor que 100, porém optamos por 98, para a coleção de livros, que atenda às condições especificadas no enunciado e, a partir disso,

[13]Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 34) *apud* Noguti, (2014, p. 234).

começa-se a busca por padrões que venham a satisfazer as condições do problema. Verificando os números menores que 100, que satisfaçam as condições do problema, observamos que, como Ivete pretende doar metade dos livros ao hospital, a quantidade não pode ser um número ímpar. No Quadro 2, infracitado, discutem-se as possibilidades.

Quadro 2 – Possibilidade para a resolução do Problema 2

Número de Livros	Doados ao Hospital	Livros da Ivete	Livros para 4 amigos
98	49	10	39
96	48	10	38
94	47	10	37
92	46	10	36
90	45	10	35
88	44	10	34
86	43	10	33
84	42	10	32
82	41	10	31
80	40	10	30
78	39	10	29
76	38	10	28
74	37	10	27
72	36	10	26
70	35	10	25
68	34	10	24
66	33	10	23
64	32	10	22
62	31	10	21
60	30	10	20
58	29	10	19
56	28	10	18
54	27	10	17
52	26	10	16
50	25	10	15

48	24	10	14
46	23	10	13
44	22	10	12
42	21	10	11
40	20	10	10
38	19	10	9
36	18	10	8
34	17	10	7
32	16	10	6
30	15	10	5
28	14	10	4
26	13	10	3
24	12	10	2
22	11	10	1
20	10	10	-
18	9	Falta um livro	-
16	8	Faltam dois livros	-
14	7	Faltam três livros	-
12	6	Faltam quatro livros	-
10	-	-	-

Fonte: elaborado pelo o autor, (2018).

O total de livros a serem distribuídos para os amigos deve ser um número positivo e múltiplo de 4, ou seja: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 e 36. Sendo assim, por meio do quadro, verificamos que Ivete pode ter 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, ou 92 livros.

2) Algebricamente:

Seja l o número de livros de Ivete. Então, $l/2$ é o total de livros doados ao hospital e, como Ivete reteve para si 10 livros, $l/2 - 10$ é o restante de livros a serem distribuídos para os 4 amigos. Assim:

$$(l/2 - 10)/4 = x.$$

Nessa expressão x corresponde ao número de livros que cada amigo deverá receber. Simplificando essa expressão:

$$(l/2-10)/4=x \rightarrow ((l-20)/2)/4=x \rightarrow (l-20)/2=4x \rightarrow l-20=8x.$$

Assim, l*-20* tem que ser divisível por 8.

A partir daqui o aluno deve considerar todos os múltiplos positivos de 8 para obter os possíveis valores para a solução do problema, ou seja: 8, 16, 24, 32, 40, ...

$l-20=8x \rightarrow l=28$

$l-20=16 \rightarrow l=36$

$l-20=24 \rightarrow l=44$

...

$l-20=72 \rightarrow l=92$

3º Encontro

Nesse encontro, pretende-se fazer as resoluções dos problemas trabalhados no encontro anterior. Será pedido a um aluno de cada grupo que se dirija até a lousa e coloque sua resolução. Logo, será feita a plenária.

Objetivo Específico

1) Verificar o pensamento desenvolvido pelos grupos, analisar o desenvolvendo de estratégias para resolver os Problemas 3 e 4 a partir dos elementos propostos neste plano de ensino (incógnitas, dados, correlação, conhecimentos específicos e representação).

4º Encontro

Nesse encontro, serão propostos os problemas 3 e 4, utilizando a mesma estratégia de ensino do encontro anterior com intuito de promover condições para que os alunos tenham um pensamento ativo e reflexivo sobre esses problemas e, consequentemente, desenvolvam suas habilidades para resolver problemas.

Problema 3[14]: Ian tem menos de 100 cartões de beisebol em sua coleção. Se ele colocar em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocar em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocar em pares, sobra apenas um cartão. Quantos cartões Ian têm?

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do Problema 3:

I. *Incógnita do problema*: Quantos cartões Ian têm?

[14]Problema traduzido pela autora de Krulick e Rudnick, (2005, p. 28) *apud* Noguti, (2014, p. 234).

II. *Dados: A quantidade de cartão que Ian tem é* menor que 100; se colocar em pilhas de quatro, sobram três cartões; em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões; em pares, sobra apenas um cartão;

III. *Correlações:* Aritmética, divisibilidades, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum;

IV. *Conhecimentos específicos:* critérios de divisibilidade;

V. *Representação*: desenhos dos montes de cartões, relação entre a quantidade de cartões, com a quantidade que sobra.

Possíveis formas para resolução do Problema 3:

Inicialmente, deve-se construir um quadro com os dados do problema. Para isso, pode-se começar escolhendo uma quantidade qualquer, menor que 100, para a coleção de cartões, que atenda as condições especificadas no enunciado e, a partir disso, buscando padrões. Verificando os números menores que 100, que satisfazem as condições do problema, observa-se que, se Ian colocar os cartões em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocar em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocar em pares, sobra apenas um cartão. Veja o quadro 3, os números que menores de 100 que podem ser colocados em montes de quatro pilhas e depois verificar por três e sete.

Quadro 3 – Possibilidade para a resolução do Problema 3

Números de cartões	Pilhas de quatro	Resto	Pilhas de três	Resto	Pilhas de sete	Resto
99	24	3	33	0	14	1
95	23	3	31	2	13	4
91	22	3	30	1	13	0
87	21	3	29	0	12	3
83	20	3	27	2	11	6
79	19	3	26	1	11	2
75	18	3	25	0	10	5
71	17	3	23	2	10	1
67	16	3	22	1	9	4
63	15	3	21	0	9	0
59	14	3	19	2	8	3

55	13	3	18	1	7	6
51	12	3	17	0	7	2
47	11	3	15	2	6	5
43	10	3	14	1	6	1
39	9	3	13	0	5	4
35	8	3	11	2	5	0
31	7	3	10	1	4	3
27	6	3	9	0	3	6
23	5	3	7	2	3	2
19	4	3	6	1	2	5
15	3	3	5	0	2	1
11	2	3	3	2	1	4
7	1	3	2	1	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor, (2018).

Feito o Quadro 3, voltamos ao enunciado para verificar a condição dada no problema para e com isso encontrar a quantidade de cartões que Ian possui. Verifica-se que o problema 3 possui solução única que corresponde a 63 cartões.

2) Uma outra possibilidade é verificar que: como em pilhas de 3 e 7 não sobram cartões, o número de cartões é múltiplo de 3 e de 7 e, consequentemente, é múltiplo de 21.

Possibilidades:

1) 3 x 7 = 21 (muito menor que 100 cartões)

3 x 7 x 7 = 147 (passou o total de cartões de Ian)

3 x 3 x 7 = 63 (pode ser o número de cartões de Ian)

Verificando, devemos dividir 63 por 4 e por 2 e analisar os restos que encontraremos:

$$\begin{array}{r|l} 63 & 4 \\ \cline{2-2} -60 & 15 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 2 \\ \cline{2-2} -62 & 31 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 7 \\ \cline{2-2} -63 & 9 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ \cline{2-2} -63 & 21 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo, Ian possui 63 cartões.

Assim que os alunos terminarem o Problema 3, o Professor-Pesquisador pediu que cada um representando o seu grupo fosse até a lousa para colocar sua resposta e logo após fazer a discussão com toda sala, assim que terminou a plenária à professora-colaboradora recolheu as atividades e entregou o Problema 4.

Problema 4[15]: Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato, não necessariamente verdadeiro, e gasta 10 minutos para contá-lo para seus três melhores amigos. Imagine que cada um dos três amigos resolve fazer a mesma coisa e 10 minutos depois contam a novidade para três colegas que ainda não a conheciam. Assim, cada um que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados, gastando, para isso, 10 minutos.

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do problema:

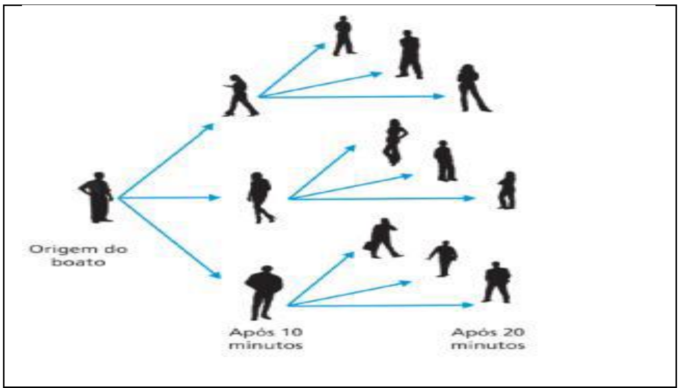
I. *Incógnita do problema:* qual o tempo que todos os alunos ficaram sabendo do boato?

II. *Dados:* uma pessoa fica sabendo de um boato; gasta 10 minutos para contá-lo para seus três melhores amigos; os três amigos resolvem fazer a mesma coisa e 10 minutos depois contam a novidade para três colegas que ainda não a conheciam, assim cada um que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados;

III. *Correlações:* trata-se de um boato que se espalhou na escola;

IV. *Conhecimentos específicos:* multiplicidade, potenciação;

V. *Representação:*



[15]Problema retirado de Noguti (2014, p. 234).

Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	3x3	3^2
30	3x3x3	3^3
40		
50		
60		
70		

Fonte: Elaborado pelo autor, (2018).

Analisando o Quadro 4 abaixo:

Quadro 4 – Possibilidade para a resolução do Problema 4

Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	3x3	3^2
30	3x3x3	3^3
40	3x3x3x3	3^4
50	3x3x3x3x3	3^5
60	3x3x3x3x3	3^6
70	3x3x3x3x3	3^7

Fonte: Elaborado pelo autor, (2018).

Agora, respondendo às perguntas:

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

Observando a tabela:

$$3^3 – 3^2 = 27 – 9 = 18 \text{ pessoas}$$

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

Analisando a tabela, nota-se o total de alunos que será a soma de quantos alunos sabem desse boato a cada 10 minutos:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40 \text{ pessoas.}$$

c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364 \text{ pessoas.}$$

Em apenas 50 minutos, todos os alunos da escola saberiam do boato.

5º Encontro

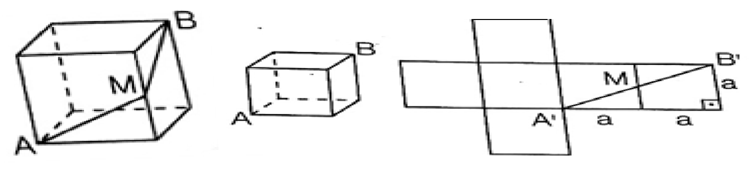
Ao inciar o quintoencontro, será feita a correção dos problemas com a plenária para a correção dos problemas 3 e 4 e, logo depois, distribuir-se-á o problema 5, concedendo, em média, 20 minutos para o grupo resolver as atividades e logo depois ser feito a plenária com os alunos.

Problema 5[16]: A figura abaixo indica um cubo de aresta a= 10 cm. Uma formiga localizada em *A* deseja buscar comida, localizada em *B*, caminhando sobre as faces do cubo. Qual é a medida do caminho mais curto que ela pode percorrer de A até B?

Fonte: Iezzi *et al.* (2009, p. 316).

Uma possível forma para desenvolver estratégias para a resolução do problema:

I. *Incógnita do problema:* Qual é a medida do caminho mais curto que ela pode percorrer de *A* até *B*?
II. *Dados:* um cubo de aresta a= 10cm; uma formiga localizada em *A* deseja buscar comida, localizada em *B* caminhando sobre as faces do cubo.
III. *Correlações:* perímetro, geometria plana, teorema de Pitágoras.
IV. *Conhecimentos específicos:* Aritmética.
V. *Representação:*



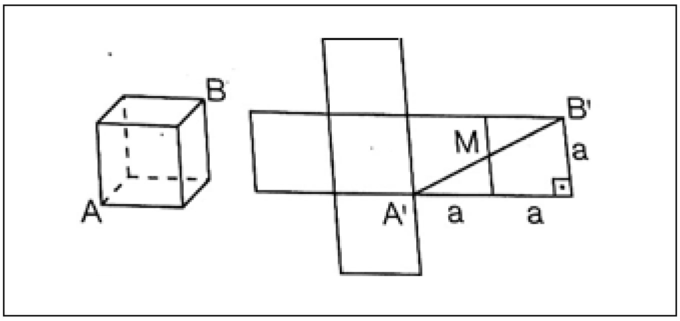
Fonte: Iezzi *et al.* (2009, p. 316).

[16] Problema retirado de Iezzi *et al.* (2009, p. 316).

Possível forma para a resolução do problema:

Como a formiga caminha sobre as faces, basta planificar a superfície do cubo e unir *A* e *B* por um caminho em linha reta:

Quadro 5 – Possibilidade para a resolução do Problema 4



Fonte: Iezzi *et al.* (2009, p. 316).

$A'B'^2 = (2a)^2 + a^2 = 4a^2 + a^2$

$A'B'^2 = a\sqrt{5}$

Como a = 10 cm, obtém-se: $A'B' = 10\sqrt{5} = 10(2{,}24) = 22{,}4$ cm.

Parte II– Ensino "ATRAVÉS" Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao se ensinar através da resolução de problemas, eles são valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio de fazer isso. Nessa abordagem, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender matemática, mas também como principal meio de fazer matemática, introduzirem-se conceitos, conteúdos ou procedimentos novos.

6º e 7º Encontros

O Professor-Pesquisador iniciará esses encontros com uma atividade em que se faz necessário o uso de logaritmos no decorrer da resolução. Em seguida, o Professor-Pesquisador apresentará algumas questões que inicialmente não poderão ser resolvidas com os conteúdos já ministrados até o momento. Com isso deverá explicar para os alunos qual conteúdo será necessário para dar continuidade às atividades. O Professor-Pesquisador mostrará o histórico do Logaritmo, suas aplicações, qual seu significado, bem como as mudanças que teve, desde quando foi pensado como um facilitador de cálculos e métodos para resolver problemas complexos.

Objetivos do Encontro

- ✓ Levar os alunos a conhecer em parte da história dos logaritmos, as diversas formas como eles se apresentam em diversos contextos, desde juros em operação financeira à verificação de escalas para medir a intensidade de terremotos, dentre outros.
- ✓ Fixar o conceito de logaritmos, condição de existência de um logaritmo e consequências da definição fazendo uso da vertente "para".

Atividades para introduzir os conceitos de Logaritmos (definição e propriedades)

1) O Professor-Pesquisador iniciará pedindo que os alunos formem duplas e resolvam os seguintes problemas:

   Problema 1[17]: Determine o valor de x nas situações a seguir:

   a) $2^x = 4$
   b) $2^x = 8$
   c) $10^x = 1000$
   d) $10^x = 10000$
   e) $2^x = 5$
   f) $10^x = 8000$
   g) $10^x = 990$

2) O Professor-Pesquisador, após os alunos resolverem as atividades, fará alguns questionamentos tais como: "Qual é a dificuldade encontrada ao tentar resolver os itens *e*, *f* e *g* que não foi encontrada ao resolver os itens de *a* a *d*?"

O objetivo desse questionamento é fazer com que os alunos percebam que a dificuldade ocorre porque 5 não é potência inteira de 2. De forma análoga, 8000 e 990 não são potências inteiras de 10.

3) O Professor-Pesquisador deverá instigar o aluno a tentar descobrir alguns detalhes sobre a solução das equações *e*, *f* e *g*; alguns detalhes da solução, próximo de qual número inteiro está, ou entre quais valores inteiros devemos buscar tais soluções.

*No item **e**, o esperado é que os alunos percebam que x deve estar entre 2 e 3. É possível que alguns sugiram mais próximo de 2 do que do 3. No f, o esperado é que eles percebam que o x deve estar entre 3 e 4. É possível que alguns sugiram que estejam mais perto do 4 do que do 3. No g, o esperado é que eles sugiram que x deve ser bem mais próximo do 3.*

Na sequência, o Professor-Pesquisador proporá o problema 2:

[17] Problema retirado de Dante (2013, p. 175).

Problema 2[18]: Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Utilizando o ensino "sobre" Resolução de Problemas, desenvolvemos uma possível forma de estratégia para resolução do problema:

1º) *Incógnita do problema:* em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

2º) *Dados:* a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente;

3º) *Correlações:* trata do crescimento demográfico na América Latina;

4º) *Conhecimentos específicos:* Juros, função exponencial e equações exponenciais;

5º) *Representação:*

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 .1,012$
2anos	$P_2 = (P_0.1,012). 1,012 = P_0.(1,012)^2$
3 anos	$P_3 = P_0.(1,012)^3$
…	…
X anos	$P_x = P_0.(1,012)^x$

Fonte: Elaborado pelo autor, (2018).

Formalização

Supondo que a população dobrará após x anos, tem-se:

$$P_x = 2\ P_0,$$

Daí:

$$P_0\ (1,012)^{x} = 2\ P_0$$

$$(1,012)^{x} = 2$$

[18] Problema retirado e adaptado de Dante (2013, p. 177).

Como se pode observar, não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui. Com objetivo de transformar uma equação exponencial como essa em uma igualdade entre potências de mesma base, desenvolver-se-á a noção de **Logaritmo**.

Após expor a resolução de cada questão, será feita uma discussão dos exercícios e das diferentes formas de resolução. Algumas perguntas serão pertinentes nesse momento com o objetivo de se atentar para as propriedades das operações quando se quer resolver equações.

Nesse momento, o Professor-Pesquisador introduzirá a definição formal de logaritmos, condição de existência e consequências da definição.

Definição

Dado os números reais positivos **a** e **b**, com a ≠ 1, chamamos de logaritmo de **b,** na base **a**, denotado por $\log_a b$, o expoente ao qual se deve elevar a base **a** para que o resultado seja **b**. ou seja que, dados **a, b** ϵ R^*_+ e **a** ≠ 1, $\log_a b$ = c ⇔ $a^c = b$.

$\log_a b = c$		$a^c = b$
b é logaritmando ou antilogaritmo.		**b** é a potência
a é a base.		**a** é a base da potência
c é o logaritmo.		**c** é o expoente

Fonte: Elaborado pelo autor, (2018).

Condição de existência de um logaritmo

Para $\log_a b$ existir, devemos ter: logaritmando positivo: b > 0, base positiva e diferente e 1: a > 0 e a ≠ 1.

Consequências/decorrências da definição:

São logaritmos cujos resultados decorrem de maneira imediata da definição.

Consideradas satisfeitas todas as condições de existências, temos:

I. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja a > 0 e a ≠ 1.

Evidente, pois qualquer que seja a base **a** elevada ao expoente 0 apresenta resultado igual a 1.

II. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo a > 0 e a ≠ 1.

Evidente, pois qualquer que seja a base elevada ao expoente 1 apresenta resultado igual a **a**.

III. $\log_a a^m$ = m, pois $a^m = a^m$ para todo a > 0 e a ≠ 1 e para todo n.

Evidente, pois **m** é o expoente que devemos colocar na base a para obtermos o resultado **a^m**.

IV. $a^{\log_a m}$ = m, com N > 0 e a > 0 e a ≠ 1.

V. $\log_a x = \log_a y$ ⇔ x = y, com x > 0, y > 0 e a ≠ 1.

Sistemas de logaritmos

Definição: o conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a (0 < a ≠ 1) é chamado "sistema de logaritmos de base a". Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivas é o sistema de logaritmos de base 2.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática, a seguir elencados e esclarecidos.

O sistema de Logaritmos Decimais

Esse sistema foi desenvolvido pelo matemático inglês Briggs (1536-1630), o primeiro a destacar as vantagens dos logaritmos de base 10 como instrumento auxiliar dos cálculos numéricos. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1000, fato ocorrido em 1617. Por simplificação, representamos $\log_{10} x$ por $\log x$, para todo x > 0.

O sistema de Logaritmos Neperianos (ou natural)

Tem o nome de neperiano e deriva de John Napier (1550-1617), matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. Indicamos com $\log_{10}$ x, ou simplesmente log x, o logaritmo decimal de x, e representaremos o logaritmo neperiano de x com $\log_e x$, ou $\ln x$. Os Logaritmos Neperianos Naturais são logaritmos representados pela base "e" que é um número irracional denominado de número de Euller equivalente a e = 2,71828... Matematicamente representamos o logaritmo natural por:

$\ln x = \log_e x$**,** sendo o número irracional ***e*** definido por $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$

Exemplos de aplicação para fixação da definição de logaritmos e a primeira lista de atividades.

Vejamos alguns exemplos:

a) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$ b) $\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$

c) $\log_2 1/8 = -3$, pois $2^{-3} = 1/8$ d) Vamos calcular o valor de $27^{\log_3 4}$.

$27^{\log_3 4} = (3^3)^{\log_2 4} = (3^{\log_3 4})^3 = 4^3 = 64$

e) Calcule o valor de x tal que $\log_5(2x+1) = \log_5(x+3)$.

Devemos ter $2x + 1 = x + 3$, e daí $x=2$.

f) O valor de $y=\ln e^3 + \log 0{,}01$.

$\ln e^3 + \log_e e^3 = x$

$e^x = e^3$, temos $x= 3$ e $\ln e^3 = 3$.

$\log 0{,}01 = \log 1/100 = \log_{10} 10^{-2} = -2$

Então, $y = 3 + (-2) = 1$.

Sempre que terminamos de explanar os conceitos e construir novos conhecimentos propomos um ensino "para" Resolução de Problemas. Segundo Schroeder e Lester (1989), ao ensinar "*para*" resolver problemas, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e propriedades, após isso, coloca vários exemplos tentando abranger a maior quantidade de situações. Assim, deve evindenciar estratégias e usar o conhecimento adquirido pelo aluno anteriormente na resolução das atividades propostas.

Atividades 01

1) Calcule estes logaritmos, usando a sua definição:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{25} 0{,}008$ c) $\log 10000$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 128$ e) $\log_2 64$

f) $\log_8 \frac{1}{2}$ g) $\log_5 3125$ h) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[4]{3}$ i) $\log_8 32$

j) $\log_3 27$ k) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ l) $\log_4 \sqrt{32}$ m) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

2) Calcule o valor de x:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_9 27 = x$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$

3) (ITA-SP) Calcule o valor de $\log_2 16 - \log_4 32$.

4) (UCS-RS) Calcule o valor de $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 125)$.

5) Dê o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $C = \ln e^2 - 3\ln\sqrt[3]{e} + 2\ln 1$ b) $y= \ln e^3 + \log 0{,}01$. c) $\ln e^8$

d) $\ln\sqrt[3]{e} + e^{\ln 2}$ e) $e^{1 + \ln 1}$

6) Dê o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$

Parte III – Ensino "Para" Resolução de Problemas

8º Encontro

O Professor-Pesquisador fazendo uso do termo "Para" Resolução de Problemas, deixará os alunos concluírem as atividades propostas no encontro anterior com intuito de fixa os conceitos trabalhados e será partirá para a correção.

Objetivos do Encontro

2) Fixar o conceito de logaritmos, condição de existência de um logaritmo e consequências da definição, apresentado no encontro anterior; utilizar as propriedades operatórias do logaritmo.

9º Encontro

Nesse encontro, ainda continuando a abordagem "para", apresentar-se-ão os conceitos das propriedades operatórias envolvendo logaritmos, e, em seguida, a formalização e a explanação sendo proposta a segunda lista de atividades. O objetivo é levar os alunos a compreenderem as propriedades operatórias dos logaritmos e suas aplicações.

Formalização

Logaritmo de um produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos dos números.

$$Se\ a > 0, a \neq 1, b > 0\ \ e\ \ c > 0, então\ \log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \,.\, c) = z$, vem:

$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

$\log_a c = x \rightarrow a^y = c$ $\quad a^z = a^x . a^y = a^{x+y} \rightarrow z = x+y$

$\log_a (b \, . \, c) = z \rightarrow a^z = b.c$

Essa propriedade também é válida para o logaritmo de três ou mais números reais e positivos, ou seja, se $0 < a \neq 1$ e $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, …, $b_n > 0$, então:

$\mathrm{Log}_a (b_1.b_2. \ldots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$

Vejam-se alguns exemplos:

$\mathrm{Log}_2\, 6 = \log_2(2.3) = \log_2 2 + \log_2 3$

$\mathrm{Log}\ 210 = \log\,(2.3.5.7) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7$

Logaritmo de um quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$Se\ a > 0, a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0, então\ \log_a \frac{b}{c} = (\log_a b - \log_a c)$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a b/c = z$, temos:

$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

$\log_a c = x \rightarrow a^y = c$ $\quad a^z = (ax/ay). = a^{x-y} \rightarrow z = x - y$

$\log_a (b/c) = z \rightarrow a^z = (b/c)$

Vejam-se alguns exemplos:

$\log 2/3 = \log 2 - \log 3$
$\log_2 1/5 = \log_2 1 - \log_2 5 = -\log_2 5$
$\log_3 10/7 = \log_3 10 - \log_3 7 = \log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 7$

Logaritmo de uma potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positivo é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$Se\ a > 0, a \neq 1, b > 0, m \in \mathbb{R}, então\ \log_a b^m = m.\log_a b$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$ $\quad a^y = (ax)^r = a^{rx-y} \rightarrow y = rx$

$\log_a b^r = y \rightarrow a^y = b^r$

Vejam-se alguns exemplos:

$\text{Log}_5\, 2^3 = 3\, .\text{log}_5 2$

$\text{Log}\, \sqrt{2} = \text{log}\ 21/2\ = 1/2\ .\ \text{log}\ 2$

$\text{Log}_2 1/27 = \text{log}_2\ 3^{-3} = -\ 3.\ \text{Log}_2\ 3$

Mudança de Base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base. Por exemplo, para aplicar as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. Senão, é preciso que alguns logaritmos mudem de base. Outro exemplo: determinar o valor de log_0,9 0,2. Uma das formas de determinar esse valor é usar os logaritmos de base 10, pois as tábuas de logaritmos e as calculadoras trabalham com o sistema de logaritmos decimais.

Para isso, usa-se a mudança de base

$$\text{Se a} > 0, b > 0\ e\ c > 0, b \neq 1, c \neq 1, \text{então}\ \log_b a\ \cdot \log_c b = \log_c a$$

Suponha-se que se saiba o valor de $\log_c b = y$ e se desconheça o valor de $\log_a b = x$. como é possível calcular x ?

Faça-se $\log_c a = z$ e procure-se uma relação entre x, y e z.

Eis:

$\text{Log}_a\, b = x \rightarrow a^x = b$ (I) $\text{Log}_c\, b{=}y \rightarrow c^y = b$ (II) $\text{Log}_c\, a = z \rightarrow c^z = a$ (III)

Substituindo (III) e (II) em (I), vem:

$a^x = b \rightarrow (c^z)^x = c^y \rightarrow c^{zx} = c^y \rightarrow zx = y \rightarrow x = y/z$

Concluindo:

$\text{Log}_a\, b = \text{logc}\ b/\text{logc}\ a$

Aplicação importante: Dados “a” e “b” reais positivos e diferentes de 1, qual é a relação entre $\log_a b$ e $\log_b a$? Parte-se para a aplicação da fórmula da mudança de base supondo c = b.

Tem-se:

$\log_a b = \text{logc}\frac{\text{b}}{\text{logc}}\text{a} = = \text{logb}\frac{\text{b}}{\text{logb}}\text{a} = = 1/\text{logba}$ ou $\text{Log}_a\, b\ .\ \text{Log}_a\, b = 1$

Colog

Denomina-se cologaritmo de um número N (N > 0) numa base a (positivo e diferente de 1) o oposto do logaritmo do número N na base a ou o logaritmo do inverso de N na base a.

$\text{colog}_a N = -\log_a N$, ou consequentemente$(\mathbf{colog})_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{N} = (\mathbf{log})\boldsymbol{a}(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}})$

Atividade 02

1) Sabendo que log 2=0,301, log 3=0,477, log 5 = 0,699 e log 7 = 0,845, calcule:

a) log 8 b) log 2,5 c) log 15 d) log 81 e) log 42

f) log 7,2 g) log 1,8 h) log 1,2 i) log 12,5

2) Dê a expressão logarítmica que equivale a

a) $\log_3 a - \log_3 c + \log_3 b$ b)$5 \log_3 b + \log_3 c - 2 \log_3 a$ c)$5 \log b - \log a + 2 \log c + 2$

3) (UFGD) Uma empresa de derivados químicos considera que, quando x milhões de dólares são investidos em pesquisa, o lucro anual, em milhões de dólares, passa a ser $L(x)= 20 + 5 \log_3 (x+3)$, de quanto deveria ser o investimento em pesquisa para que o lucro anual fosse de 40 milhões de dólares?

4) (Portal Positivo) Por volta dos anos 80, durante a implantação do projeto Proálcool, uma montadora estimou que sua produção de carros a álcool teria um crescimento anual de acordo com a expressão $P(t) = 10^5$. Log (t+1), onde P é a quantidade produzida e t o número de anos. Dessa forma, daqui a 99 anos a produção estimada de carros será de:

5) Calcule:

a) $\text{colog}_2 16$ b) log 1/5 c) $\log_a 1/b$ d) $\text{colog}_4 128$ e) $\text{colog}_{25} 625$

7) Sabendo que log 2 = a e log 3 = b, calcule em função de a e b:

a) log 6 b) log 1,5 c)log√(3&1,8) d) log 0,024

8) Se log E = 1 + log a + 2. log b – log c, determine E.

9) Sabendo que log a = 1/2 e log b = –1, calcule o valor de:

c) $\log_b a$= b) $\log_a b$= log (a/b) = d) log (a.b) =

10º Encontro

Nesse encontro, o Professor-Pesquisador e a professora-colaboradora pedirão que os estudantes apanhem a atividade de fixação proposta no encontro anterior e continuem em sua resolução, e, na sequência, irão auxiliando os alunos durante toda a resolução das atividades. Por fim, logo após a conclusão das atividades, far-se-ão as correções das atividades em plenária.

Objetivos do Encontro

3) Solucionar as atividades propostas no 9º encontro para fixar os conceitos trabalhados sobre propriedades operatórias de logaritmos.

Ensino "ATRAVÉS" Resolução de Problemas

11º Encontro

Iniciando o encontro com uma situação problema para construir a ideia de Função Logarítmica, fazendo uso da vertente "através" na Resolução de Problemas, pretende-se que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecendo relações entre essas ideias, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e, assim, desenvolver capacidade de resolver problemas como foi proposto na primeira etapa deste plano de ensino.

Objetivos do Encontro

4) Introduzir os conceitos de Função Logarítmica, a partir do ensino "através" da Resolução de Problemas.

Função Logarítmica

Como já se viu nos tópicos anteriores, são várias as situações-problemas que, a partir de uma função exponencial, podem gerar a necessidade de um logaritmo. Contudo, outras situações já partem diretamente do Logaritmo como é o caso da Escala Richter, a medição do PH, a intensidade auditiva ou nível sonoro entre muitos outros.

Situação Problematizada I

Problema 3[19]: Nivaldo está depositando suas economias em caderneta de poupança especial, que rende 2% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre?

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do problema:

I. *Incógnita do problema:* Qual a quantidade de meses para que o valor depositado dobre o seu valor?
II. *Dados:* depositando suas economias que rendem 2% a.m.
III. *Correlações:* Matemática Financeira.
IV. *Conhecimentos específicos:* porcentagem, juros e montante.
V. *Representação:*

Tempo (Mês)	Rendimento
Início	C
1	C_1= c + 2% de c = 1,02c
2	C_2 =1,02 + 2% (1,02C) = $(1,02)^2$C
3	$C_3 = (1,02)^2 \cdot C + 2\% \cdot (1,02)^2 \cdot C = (1,02 \cdot C)^3$
….	…….
N meses	$C_N = C \cdot (1,02)^n \cdot C$

Fonte: elaborado pelo autor, (2018).

Vamos chamar de *c* o valor inicial depositado por Nivaldo. *Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês da aplicação?*

Será c + 2% de c = c + 2/100 c = c + 0,02 c = 1, 02 c.

Qual será o saldo em conta no final do 2ºmês de aplicação?

Bem, no 2º mês o rendimento de 2% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º, ou seja, sobre 1,02 c.

Assim, teremos o saldo de:

$1,02 + 0,02 \cdot (1,02c) = 1,02c\,(1 + 0,02) = (1,02)^2\, c$

Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?

Será $(1,02)^3 \cdot c$.

Qual será o saldo na poupança no final de n meses de aplicação?

[19] Problema retirado IEZZI *et al.* (2004) pág. 226.

Será $(1,02)^n c$

Como queremos que a importância dobre, queremos que ela fique igual a 2c no final de n meses, então:

$(1,02)^n c = 2 \cdot c$

$(1,02)^n = 2$ aplicando logaritmos, vem:

$\text{Log}_{1,02} (1,02)^n = \log_{1,02} 2$

$N = \log_{1,02} 2$ (aproximadamente 35 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial triplicasse? Qual seria o número de meses?

$N = \log_{1,02} 3$ (aproximadamente 55 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por x? Qual seria o número de meses?

N= $N = \log_{1,02} X$

Enfim, para que o capital inicial seja multiplicado por x, é necessário que transcorra um prazo de n(x) meses. O valor n(x) é uma função de x dada pela lei: N(x) = $N = \log_{1,02} x$, que é um caso particular de função logarítmica.

A partir de agora, define-se formalmente a função logarítmica e investigam-se seus gráficos e relações com outras funções.

Formalização

Definição

Dado um número real a (com $0 < a \neq 1$), chama-se função logarítmica de base **a,** a função dada pela lei $f(x) = \log_a x$. para todo x € ℝ, x > 0, existe um único logaritmo em uma base a positiva e diferente de 1. Assim, pode-se afirmar que: a função **f**, de $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número x > 0 é denominada de função logarítmica na base **a** ou seja, **f**: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Domínio da Função

O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos e o conjunto imagem é o conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}_+^*$ e $Im = \mathbb{R}$).

$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$, pela definição temos $x > 0$ e $0 < a \neq 1$.

Exemplos

1) Vejamos como descobrir o domínio das funções definida por:

a) $f(x) = \log_{(x - 1)} (3 - x)$.

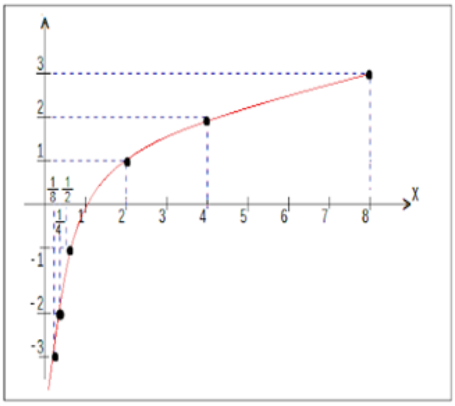
b) $g(x) = \log_{(x - 2)} (5 - 2x)$.

Gráfico cartesiano da Função Logarítmica

1) Vamos construir o gráfico da função $y=\log_2 x$, definida para $x > 0$. Inicialmente, construímos uma tabela dando valores a y, para depois calcularmos x.

x	$y=\log_2 x$
	-3
	-2
	-1
	0
	1
	2
	3

x	$y=\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

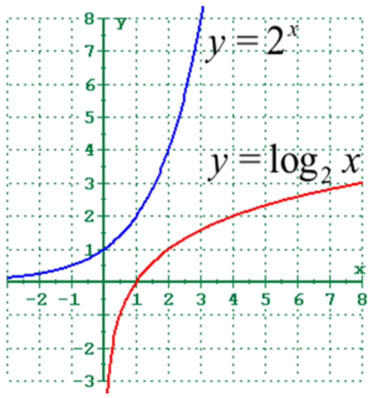


Fonte: elaborado pelo autor, (2018).

Outro modo de construir esse gráfico é considerar que, se $y=\log_2 x$, então $x = 2^y$. Isso significa que o ponto (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu "inverso" (y, x) está na função exponencial de mesma base. Todavia, os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante do plano cartesiano. Portanto, conhecendo o gráfico da função exponencial de base 2, por simetria, obtém-se o gráfico da função logarítmica de base 2.

x	$y=2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

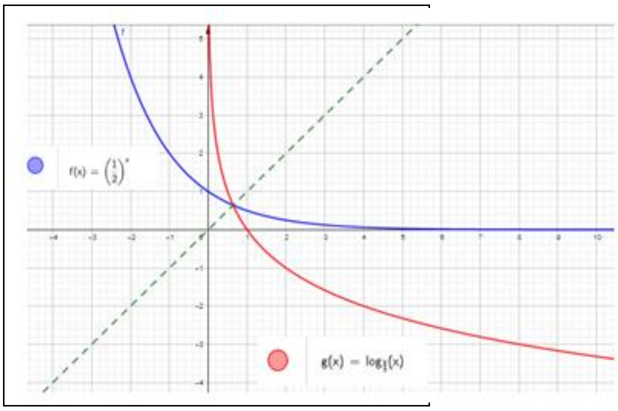
x	$y=\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Fonte: elaborado pelo autor, (2018).

2) Veja-se como construir o gráfico da função $y = \log 1/2\ x$, definida para $x > 0$.
Cabe lembrar como é o gráfico da função exponencial de base 1/2 e, por simetria, obter o gráfico da função logarítmica de base 1/2.

Figura 20 - o gráfico da função exponencial por simetria, obter o gráfico da função logarítmica



Fonte: elaborado pelo autor, (2018).

OBSERVAÇÕES

1) Os gráficos das funções logarítmicas sempre cortam o eixo x no ponto (1,0).

2) Quando a base é maior que 1, os números maiores que 1 têm logaritmos **positivos** e os números entre 0 e 1 têm logaritmos **negativos**.

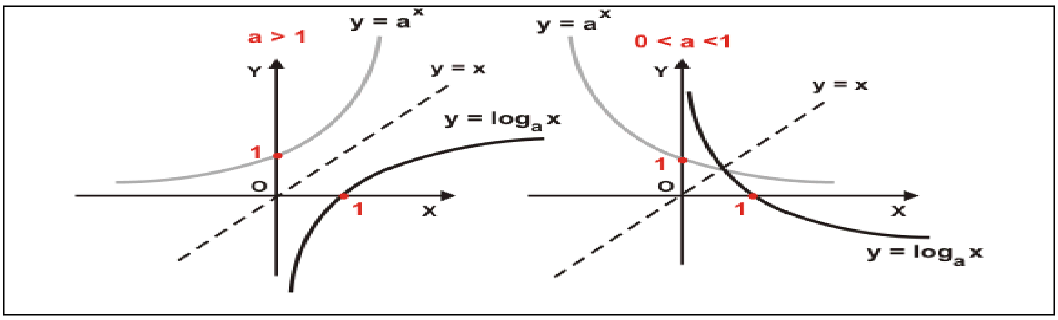
$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0 \end{cases}.$$

3) Quando a base é menor que 1, os números maiores que 1 têm logaritmos **negativos** e os números entre 0 e 1 têm logaritmos **positivos**.

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0 \end{cases}.$$

A função logarítmica é inversa da função exponencial e, portanto, o seu gráfico é simétrico do gráfico da função exponencial em relação à reta y = x, sendo representada graficamente por:

Figura 21 - Função logarítmica inversa da função exponencial

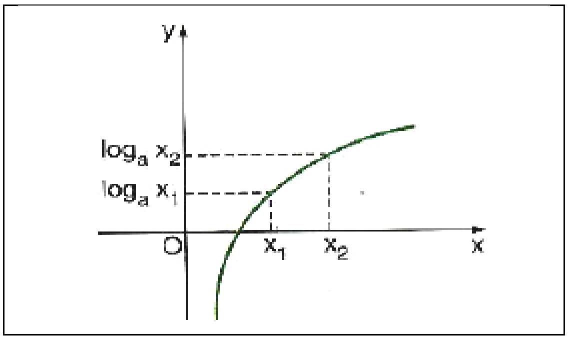


Fonte: elaborado pelo autor, (2018).

Propriedades

Vejam-se agora algumas propriedades envolvendo função logarítmica.

Se a > 0, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é **crescente**.



Temos:

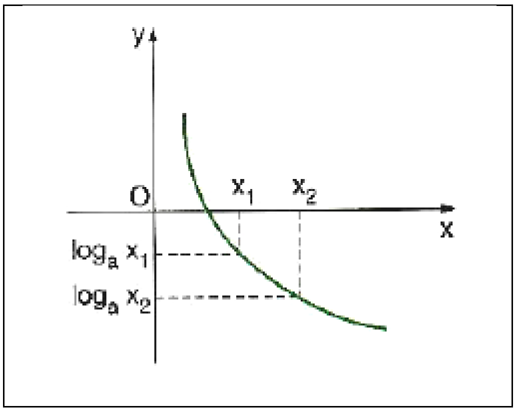
$$X_1 < X_2 \leftrightarrow a^{\log_a X_1} < a^{\log_a X_2} \leftrightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2$$

Vejam-se alguns exemplos:

1) $7 > 2 \rightarrow \log_3 7 > \log_3 2$
2) $\sqrt{3} < 2 \rightarrow \log \sqrt{3} < \log 2$

Se 0 < a < 1, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é **decrescente**.

$$X_1 < X_2 \leftrightarrow \log_a X_1 > \log_a X_2$$



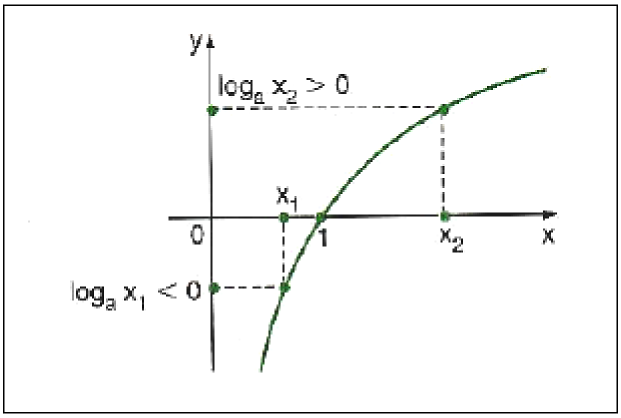
Temos:

$$X_1 < X_2 \leftrightarrow a^{\log_a X_1} < a^{\log_a X_2} \leftrightarrow \log_a X_1 > \log_a X_2$$

Vejam-se alguns exemplos:

a) $2 < 5 \rightarrow \log_{1/3} 2 > \log_{1/3} 5$
b) $9 > 4 \rightarrow \log_{0,1} 9 < \log_{0,1} 4$

Se a > 1, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos na base a.



Tem-se:

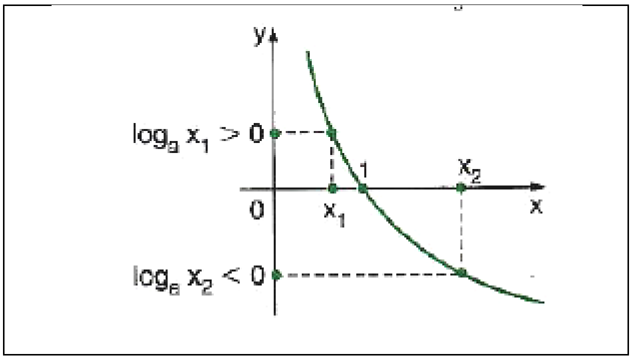
$0 < x < 1 \rightarrow \log_a x < \log_a 1 \rightarrow \log_a x < 0$

$X > 1 \rightarrow \log_a x > \log_a 1 \rightarrow \log_a x > 0$

Vejam-se alguns exemplos:

$\log_3 0{,}8 < 0$ $\log_5 0{,}92 < 0$ $\log_9 25 > 0$ $\log_2 \sqrt{5} > 0$

Se $0 < a < 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos positivos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos negativos na base a.



Tem-se:

$0 < x < 1 \rightarrow \log_a x > \log_a 1 \rightarrow \log_a x > 0$

$X > 1 \rightarrow \log_a x < \log_a 1 \rightarrow \log_a x < 0$

Vejam-se alguns exemplos:

a) $\log_{0,2} 0{,}5 > 0$ b) $\log_{0,3} 0{,}81 > 0$ c) $\log_{2/3} 17 < 0$ d) $\log_{1/5} \sqrt{5} > 0$

12º Encontro

O Professor-Pesquisador e a professora-colaboradora iniciarão o encontro distribuindo a terceira lista de atividades relacionada a funções logarítmicas pedindo que os alunos resolvam em sala e assim os dois professores auxiliaram durante todo o desenvolvimento das atividades, voltando a fazer uso do ensino "para" Resolução de Problemas com intuito de fixar tais conceitos.

Atividades 03

1) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 (4 - x)$

b) $f(x) = \log (5x - 4)$

c) $f(x) = \log_{(2 - x)} (x + 1)$

d) $f(x) = \log_x (-2x + 5)$

e) $f(x) = \log_3(x^2 + x - 12)$

f) $f(x) = \log_{(2x - 3)} (-x^2 + 2x + 3)$

2) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

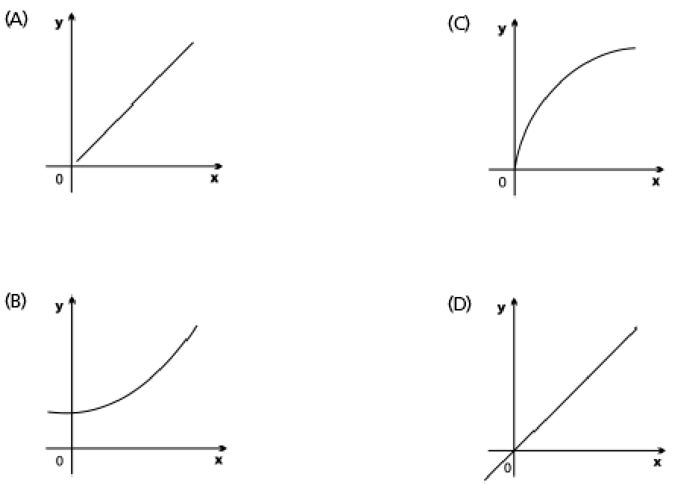
b) $f(x) = \log 1/3\ x$

c) $f(x) = 2 + \log_2 x$

d) $f(x) = \log_2(x - 1)$

3) (UERJ) A relação entre as coordenadas **x** e **y** de um corpo em movimento no plano é dada por $y = 10^{\log x}$.

O gráfico correspondente a esta relação é:



4) O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo **t**, é dado pela função $N(t) = N_o.e^{xt}$, em que N_o é o número inicial de bactérias e x é a taxa de crescimento. Se a taxa de

crescimento é de 5% ao minuto, em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o dobro da inicial? (Dado: ln2 ≅ 0,6931).

5) (UFJF-MG) Considere a função $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = \log_{10}(x^2 - 6x + 10)$. Marque a opçãoqueexpressa o valor de *f(6) – f(- 2)*.

a) 26

b) $\log_{10} 26$

c) 1

d) $\log_{10} \frac{5}{13}$

e) $1 + \log_{10} 26$

13º Encontro

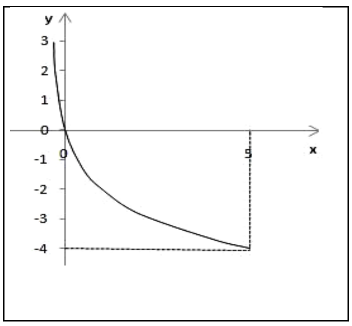
Ao iniciar o encontro, continuando a abordagem do ensino "para" Resolução de Problemas, será solicitado que os estudantes continuem a resolução das atividades do encontro anterior, em seguida deverá ser feita uma correção das atividades e a discussão sobre cada solução apresentada pelos estudantes. Nesse encontro, será distribuída outra lista de atividades sobre a função logarítmica.

Objetivos do Encontro

5) Fixar os conceitos trabalhados sobre função logarítmica.

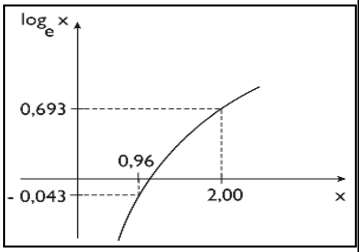
Atividades 04

1)(UF-MG) Nessa figura, está representado o gráfico da função $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ Qual o valor de *f(1)*?



2) Utilize a definição e o gráfico abaixo para responder à questão:

Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.



A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo $A = \mathbf{C.e^{kt}}$, em que:

C é a massa inicial;

A é a massa existente em **t** anos;

k é uma constante associada ao isótopo radioativo.

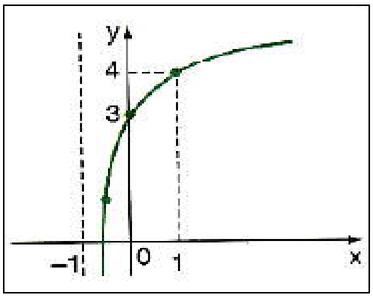
Em um laboratório, existem 60 mg de ^{226}**Ra**, cujo período de semidesintegração é de 1600 anos. Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em **mg**, a:

a) 40,2 b) 42,6 c) 50,2 d) 57,6

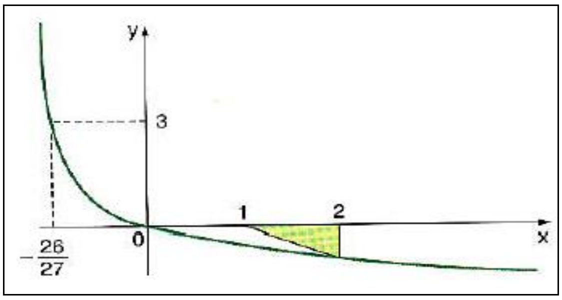
3) Resolvendo o sistema

$\begin{cases} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = 7 \end{cases}$, quais são os valores de x e y?

4) O gráfico seguinte representa a função $y = a + \log_b(x + 1)$, sendo a e b constantes reais. Quais são os valores de a e b, respectivamente?



5) (U. F. Ouro Preto - MG) O gráfico a seguir representa uma função do tipo $f(x) = \log_b (x+a)$.



Determine a área do triângulo retângulo colorido.

6) O pH de uma solução é definido por $\mathbf{pH = log\ 1/[H^+]}$, sendo $[H^+]$ a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Calcule o **pH** de uma solução que tem $[H^+]$ = 12. 10^{-8} íons-grama por litro. (Use log 2 ≅ 0,30 e log 3 ≅ 0,48.)

14º Encontro

Será verificado como já foi apresentado na primeira etapa algumas equações que não foi possível resolver por igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências. A resolução de uma equação desse tipo se baseia na definição de logaritmo.

Objetivos do Encontro

6) Identificar problemas e equações que seja necessário recorrer à definição de Logaritmos. Fazendo uso da vertente apresentada na segunda etapa desse plano de ensino. O ensino "Para" Resolução de Problemas.

Formalização

Equações exponenciais

$a^x = b \rightarrow x = \log_a b$, com $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

Vamos resolver as seguintes equações:

1) $3^x = 5$

$3^x = 5 \rightarrow x = \log_3 5. \rightarrow \log 5/log 3 = 0{,}6990/0{,}4771 = 1{,}465$

2) $2^{4x-1} = 7$

$2^{4x-1} = 7 \rightarrow 2^{4x}/ 2^1 = 7 \rightarrow 2^{4x} = 14 \rightarrow 16^x = 14 \rightarrow x = \log_{16}14.$

Vem $x = \log_{16}14 = \log 14/\log 16 = 1{,}1461/1{,}2041 = 0{,}952$

3) $2^{x-1} = 3^{2x-3}$

$2^{x-1} = 3^{2x-3} \rightarrow 2^x/2 = 3^{3x}/3^3 \rightarrow 2^x/3^{2x} = 2/27 \rightarrow 2^x/9^x = 2/27 \rightarrow (2/9)^x = 2/27$

Vem $x = \log 2/9\ \ 2/27 = \log ⟦2/27⟧ /\log ⟦2/9⟧ = 1{,}73$

Equações logarítmicas

Vamos observar como são resolvidos quatro tipos de equações logarítmicas.

1º. Equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base:

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, a solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = g(x) > 0$.

Vejam alguns exemplos:

Vamos resolver as equações $\log_2(2x - 5) = \log_2 3$ e $\log_3 (3 - x) = \log_3 (3x + 7)$.

$\log_2(2x - 5) = \log_2 3$

$2x – 5 = 3$ e $3 > 0$

$2x – 5 = 3 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$; $3 > 0$, para todo x real. então $S = \{4\}$.

$\log_3 (3 - x) = \log_3 (3x + 7)$.

$3 – x = 3x + 7 > 0$

$3 – x = 3x + 7 \rightarrow 4x = -4 \rightarrow x = -1$

Substituindo x por -1 na condição de $3x + 7 > 0$, verifica-se que é verdadeira a condição. Então: $S = \{-1\}$.

2º Equações redutíveis a uma igualdade entre um logaritmo e um número real

$\log_a f(x) = r$

A solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = a^r$

Vamos resolver as equações $\log_2 (x^2 + x – 4) = 3$ e $\log_5(2x - 3) = 2$.

a) $\log_2 (x^2 + x – 4) = 3$

$x^2 + x – 4 = 2^3$

$x^2 + x – 12 = 0$

$x= -4$ ou $x=3$

b) $\log_5 (2x - 3) = 2$

$2x – 3 = 5^2$

$2x = 28$

$X = 14$

3º. Equações que são resolvidas por meio de uma mudança de incógnita.

Vamos resolver a equação $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$

Fazendo $\log_3 x = y$, temos:

$y^2 - 2y = 3 \rightarrow y^2 - 2y -3 = 0 \rightarrow y = 3$ ou $y = -1$

mas $y = \log_3 x$; assim:

$\log_3 x =3 \rightarrow x = 3^3 = 27$ ou $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} = 1/3$

então: $S= \{1/3, 27\}$.

4º equações que envolvem utilização de propriedades ou mudança de base.

Vamos resolver as equações:

a) log33x/log3x2 = 2.

b) $2 \log x = \log (2x - 3) +\log (x + 2)$.

c) $\log_4 x + \log_x 4 = 2$

15º Encontro

Nesse encontro, trabalharemos as resoluções de atividades relacionadas a equações exponenciais e logarítmicas, com o intuito de promover a aprendizagem e a compreensão dos estudantes em diferentes abordagens sobre logaritmos e suas aplicações.

Os objetivos do encontro são:

- Identificar problemas e equações em que seja necessário recorrer à definição de Logaritmos fazendo uso da vertente apresentada na segunda etapa desse plano de ensino: o ensino "Para" Resolução de Problemas.

Atividades 04

1) Resolva, em R, as seguintes equações:

a) $3^x = 5$ b) $4^x = 19$ c) $4^{x+1} = 5$ d) $4^{2x-1} = 8^{3x+2}$ e) $4^x + 3.\ 4^{x+2} = 5$

2) Resolva as equações.

a) $\log_2 (2x - 5) = \log_2 3$

b) $\log_3 (3 - x) = \log_3 (3x + 7)$

c) $\log_5 (2x - 3) = 2$

d) $\log_2 (x^2 + x - 4) = 3$ e) $(\log_3 x)^2 - 2.\log_3 x = 3$ f) $2.\log x = \log (2x - 3) + \log (x + 2)$

g) $\log_4 x + \log_x 4 = 2$ h) $\log_3 (x + 2) - \log_{1/3} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

3)O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+. Qual o pH de uma solução cuja concentração de H_3O^+ é $4{,}5.10^{-5}$ mol /l?

4) Uma pessoa coloca R$ 1000,00 num fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% a.m. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R$ 1300,00? (Use a calculadora).

5) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre I = 0 até I = 8,9 para maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{E}{E_0}$ na qual **E** é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7.10^{-3}$ kwh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

APÊNDICE B – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DIDÁTICO PEDAGÓGICO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA.

2020

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DIDÁTICO PEDAGÓGICO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Julio César

01/09/2020

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

Júlio César Santos Pereira

Nilton Cezar Ferreira

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DIDÁTICO PEDAGÓGICO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Produto Educacional vinculado à dissertação:

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Jataí/GO

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Pereira, Júlio César Santos.

Resolução de problemas no contexto didático-pedagógico: uma proposta para o ensino de logaritmos e função logarítmica: *Produto Técnico/Tecnológico vinculado à dissertação* "Resolução de problemas como uma estratégia para o ensino-aprendizagem de logaritmos e função logarítmica" / Júlio César Santos Pereira; Nílton Cezar Ferreira. - - 2020.

29 f.; il.

Produto Técnico/Tecnológico (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2020.

1. Resolução de Problemas – ensino. 2. logaritmos e função logarítmica – proposta de ensino. 4. Produto Técnico/Tecnológico – Sequência Didática. I. Ferreira, Nílton Cezar. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.

Bibliotecária – Wilma Joaquim Silva - CRB1/1850 – IFG - Câmpus Jataí. Cod. F006/2020/2.

Sumário

Apresentação

Caros professores e professoras, este Produto Educacional foi desenvolvido durante o curso de Mestrado Profissional em Educação pra Ciências e Matemática do IFG – Campus de Jataí – GO e faz parte da dissertação: "Resolução de Problemas como uma Estratégia para o Ensino-Aprendizagem de Logaritmo e Função Logarítmica". Nele é apresentado uma Sequência Didática, elaborada a partir de atividades feitas em sala de aula, visando contribuir com o processo de ensino-aprendizagem dos alunos e a construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica, e auxiliar professores e professoras que trabalham com turmas do ensino médio, pré-vestibular e até mesmo nível superior.

No decorrer desse Produto Educacional serão apresentados os três motivos de acordo com Schroeder e Lester (1989), para se trabalhar resolução de problema em sala de aula. Esses motivos são: (1) desenvolver, no estudante, a capacidade de se criar estratégias para resolver problemas de matemática; (2) levar o estudante a construir conhecimentos de matemática a partir de problemas; e, (3) fixar conhecimento de conteúdos, e desenvolver habilidades nos estudantes para aplicar a matemática que eles aprenderam, tanto para resolver problemas práticos como problemas teóricos.

Para construção deste Produto Educacional (Sequência Didática), elaboramos um Projeto de Ensino e aplicamos em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Projeto este que foi dividido em três etapas, totalizando 15 encontros presenciais. Esta Sequência Didática foi construída a partir do Projeto de Ensino mencionado, levando em consideração os melhores resultados obtidos durante a aplicação desse projeto, após uma análise minuciosa do que ocorreu em sala de aula.

Este Produto Educacional inicia-se com uma apresentação teórica da Resolução de Problemas e um breve histórico de logaritmos, buscando inteirar o leitor do contexto histórico e subsidiá-lo no entendimento deste trabalho. Após a apresentação dessa parte teórica, é feita uma proposta de ensino em que se estabelece: 1) Um ensino "sobre" Resolução de Problemas, no qual pretende-se desenvolver, no aluno, a capacidade dele criar estratégias para resolver problemas matemáticos; 2) Auxiliar os alunos no processo de produção de conhecimentos de novos conceitos, utilizando um ensino "através" da Resolução de Problemas, para construir conhecimentos de conceitos relacionados a Logaritmos e à Função Logarítmica; 3) Um ensino "para" Resolução de Problemas, buscando fixar os conceitos introduzidos e aplicar os conhecimentos construídos para resolver problemas. Neste último, (3), é trabalhado tanto na primeira como na segunda etapa, pois, nesta última etapa utiliza-se de diversos problemas e isso pode servir para o desenvolvimento de habilidades, por meio da aplicação de conhecimentos para resolver problemas, e para a fixação de novos conhecimentos concebidos.

Ao termino de cada atividade proposta aqui, é apresentado um comentário evidenciando como se deu a aplicação dessa proposta em sala de aula, para que o professor(a) possa comparar essa aplicação com sua. E, no final deste trabalho, são apresentadas algumas considerações para reflexões sobre proposições de novos trabalhos, nessa linha, voltados para o ensino-aprendizagem em sala de aula.

Resolução de Problemas e suas Abordagens

De acordo com Onuchic (1999, p. 203), a "importância dada à Resolução de Problemas, no contexto da sala de aula de matemática, é recente e somente nas últimas décadas é que educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção". A partir daí, muitas discussões e pesquisas sobre o tema Resolução de Problemas ocorreram, principalmente, nos Estados Unidos. Atualmente, a preocupação com resolução de problemas vem ocupando cada vez mais um lugar importante nos currículos escolares, graças aos esforços de muitos matemáticos, educadores matemáticos, pesquisadores e grupos de pesquisa consolidados.

No final da década de 1980, Schroeder e Lester (1989), em seu artigo *Developing Under Standing in Mathematics via Problem Solving* (Desenvolvendo o entendimento em matemática via Resolução de Problemas, em tradução), afirmaram que existem três formas de utilizar a Resolução de Problemas em sala de aula: a primeira diz respeito ao ensino sobre Resolução de Problemas; a segunda versa acerca do ensino através da Resolução de Problemas e na terceira é tratado ensino para Resolução de Problemas.

- O ensino "sobre" Resolução de Problemas

Esta abordagem de ensino baseia-se no modelo de Polya (1995), no qual são estabelecidas estratégias e observadas as heurísticas de resolução de problemas, cujo foco é desenvolver habilidades nos estudantes para resolverem problemas. Para isso, Polya apresentou em seu livro *How to solve it*, traduzido para português como "A Arte de Resolver Problemas", quatro passos, considerados por ele, primordiais para se chegar à solução de um problema. Primeiramente é preciso compreender o problema; em seguida, ver como os diversos itens estão inter-relacionados, principalmente a relação da incógnita com os dados, e, a partir disso, produzir uma ideia da resolução do problema e estabelecer um plano. Na sequência, é importante executar o plano e, por último, fazer um retrospecto da resolução, revendo-a e discutindo-a.

Agindo dessa forma, o professor poderá levar os estudantes a compreenderem suas heurísticas, envolvidas no trabalho em questão, ou seja, suas operações mentais que possam-lhes ser úteis para resolver o problema e consequentemente desenvolver suas habilidades, produzindo, estratégias de resolução do problema.

- O ensino "através" da Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao se ensinar por intermédio da resolução de problemas, eles passam a ser valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio para construção de conhecimento, por meio da introdução de conceitos, de conteúdos ou de procedimentos, de forma a levar o estudante a conceber, e não apenas conhecer, as teorias apresentadas a ele.

Com base nesta abordagem, a Resolução de Problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino e tornou-se base da maioria das pesquisas do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP)[20].

Onuchic e Allevato (2011, p. 83) propõem uma metodologia de ensino que denominaram Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesta metodologia é sugerindo um roteiro para auxiliar o professor no desenvolvimento de um ensino "através" da Resolução de Problemas. Vale ressalta que as autoras deixam claro que esse roteiro são apenas orientações e não um modelo a ser seguido. Neste roteiro, é proposto:

1º) Proposição do problema: esse problema inicial é chamado de "problema gerador", pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não trabalhado em sala de aula.

2º) Leitura individual: quando distribuído o problema impresso, cada aluno faz sua leitura, espera-se que o aluno, ao fazer a leitura individual, reflita, coloque-se em contato com a linguagem matemática e desenvolva a sua própria compreensão do problema proposto.

3º) Leitura em conjunto: reúnem-se os alunos em pequenos grupos e fazem uma nova leitura coletiva e discussão do problema; o professor ajuda os grupos na compreensão do

[20] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP). Esse grupo é coordenado pela Professora Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, e desenvolve suas atividades no Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP – Rio Claro/SP.

problema e na resolução de problemas secundários, porém são os alunos que desenvolvem as ações pertinentes à resolução dos problemas.

4º) Resolução do problema: nessa etapa, os alunos em seus respectivos grupos, tentam resolver o problema gerador, conduzindo-o a construção de conhecimentos sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. As ações dos alunos voltam-se à expressão escrita, pois precisarão da linguagem matemática ou de recursos de que dispõem como, por exemplo, linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.

5º) Observar e incentivar: nessa etapa, o professor age, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas e motivando-os na troca de ideias, auxiliando nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos estudantes.

6º) Registro das resoluções na lousa: após a resolução do problema gerador, são solicitados que representantes dos grupos façam o registro de suas resoluções na lousa.

7º) Plenária: diante das soluções colocadas na lousa pelos representantes de cada grupo, o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação da resolução.

8º) Busca do consenso: a partir das resoluções colocadas na lousa, feita a plenária, o professor e os alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto e os incorretos. Esse é o momento crucial para o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática, visto sua relevância na construção de conhecimentos acerca do conteúdo abordado.

9º) Formalização do conteúdo: O professor registra na lousa uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem matemática padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações se for o caso.

10º) Proposição e resolução de novos problemas: esses problemas geradores possibilitam analisar e compreender elementos essenciais do conteúdo matemático introduzidos a consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas e assim por diante.

Contudo Allevato e Onuchic (2014, p. 46) salientam que "essa etapa teria forte viés do ensino para a resolução de problemas, contudo, isso não desconfigura a metodologia porque essa concepção (através) inclui as demais (sobre e para): [...]".

- O ensino "para" Resolução de Problemas

Ferreira; Pereira e Lemos (2018, p. 4) salientam que: "Ao ensinar nessa abordagem, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e suas propriedades, os principais teoremas, às vezes são enunciados de maneira simplificada e sem demonstração". E, eles complementam que depois que os conteúdos são dados, vários exemplos são postos tentado abranger a maior quantidade de situações possíveis para que o aluno seja capaz de resolver qualquer problema do mesmo assunto. Nesta abordagem o professor não está preocupado em desenvolver as habilidades matemáticas do aluno, ele espera apenas que o aluno seja capaz de reproduzir o que já foi feito e adaptar seus conhecimentos para o maior número possível de situações. E, ao fazer a avaliação do conteúdo ensinado, o professor cobra a reprodução, repetindo exercícios praticados em sala de aula e, muitas vezes, nem mesmo altera os dados.

Van de Walle (2001) apud Allevato e Onuchic (2014, p. 47) defende que: "A Resolução de Problemas deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática". Observa-se, assim, que o desenvolvimento cognitivo dos alunos continua durante a resolução de problemas, nesse sentido, a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois, nessa metodologia, o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo. Ademais, os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo diminuído o carácter sancionador das avaliações somativas.

Logaritmos: Origens e concepções

Os babilônios, segundo Boyer (2012), viveram no vale mesopotâmico no quarto milênio antes de Cristo. Era uma população de alto nível cultural que utilizava o sistema de base sexagesimal, unidade de tempo e fazia medida dos ângulos. Seu maior trunfo foi à utilização de uma notação que cobria tanto os números inteiros quanto os racionais. Entre as tabelas babilônicas se encontram algumas tabelas contendo potências sucessivas de numerais semelhantes à tabela de logaritmos, ou mais propriamente de antilogaritmos, equivalente a construída por Jhon Napier (1550 - 1617).

Pecorari (2013) salienta que as origens do descobrimento dos logaritmos remontam aos estudos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) referentes às sucessões aritméticas e geométricas sobre a sucessão de potências de um número dado, as mesmas mencionadas nas tábuas babilônicas. Vários séculos depois, na transição do Renascimento para a Modernidade até o início do século XVI, a comparação entre potências de sucessões voltou aparecer no trabalho do matemático alemão Miguel Stifel (1487-1567).

No final do século XVI, com o avanço nos estudos da Astronomia e da Navegação, cada vez mais se faziam necessários os usos dos cálculos aritméticos muito complexos, e, a invenção e o uso das frações decimais, em substituição às sexagesimais viessem facilitar os cálculos de multiplicações, divisões, potências e extração de raízes, que eram consideradas tarefas extremamente complexas.

John Napier (1550 - 1617), conforme Eves (2008), não era matemático profissional, apesar disso tinha um grande interesse em cálculos numéricos e trigonometria. Essa preocupação fica evidente em um trecho de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) de 1614, a qual continha uma tábua que fornece logaritmos dos senos de ângulos em minutos sucessivos de arcos.

De acordo com Eves (2008), as produções de Napier geraram quatro produtos, trabalho que entrou para a história da matemática, conforme se vê nas seguintes palavras:

> (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números (EVES, 2008, p. 342).

Os logaritmos oferecem uma maneira rápida de efetuar grandes divisões e multiplicações, baseando-se no princípio de que, para multiplicar potências, podem-se somar seus expoentes. E, ainda, o desenvolvimento dos logaritmos tornou possível muitas outras atividades, como a astronomia, a engenharia dentre outras.

São várias as situações-problemas que, a partir de uma função exponencial, podem gerar a necessidade de um logaritmo. Contudo, outras situações já partem diretamente do Logaritmo como é o caso da Escala Richter, a medição do PH, a intensidade auditiva ou nível sonoro entre muitos outros.

Como ensinar Logaritmos e Função Logarítmica utilizando as abordagens da Resolução de Problemas

Esta sequência didática foi planejada para ser trabalhada em 12 aulas de cinquenta minutos cada, com alunos do Ensino Médio, Pré-Vestibular e até mesmo Nível Superior, cujo o objetivo é, primeiramente desenvolver no estudante a capacidade de criar estratégias para resolver problemas de matemática. A partir daí, levar o estudante a construir conhecimentos de matemática através de problemas; e ainda, utilizar problemas para ampliar seu conhecimento e, também, fazer com que ele consiga aplicar, tanto em problemas reais quanto problemas teóricos, a matemática que ele aprendeu.

Propomos que este trabalho seja realizado em três etapas:

- Familiarizar o estudante com a Resolução de Problema. Isso pode ser feito utilizando problemas para desenvolver as habilidades dos alunos para resolver problema (um ensino "sobre" Resolução de Problemas). Para isso sugerimos um trabalho de desenvolvimento de heurísticas necessárias à produção de estratégias para resolver problemas. Este trabalho pode ser executado pelo seguinte roteiro:

1) Determinar a incógnita do problema. Muitas vezes o estudante nem sabe como começar a resolver o problema. Nesse momento o professor poderia pedir para o estudante determinar a incógnita do problema, ou seja, o que o problema pede para ser determinado, calculado ou respondido. Conhecer que solução se pretende determinar é a base para entender o problema (primeiro passo de Polya). Isso faz com que o estudante dê o primeiro passo para se envolver com o problema e produzir pensamentos ativos e reflexivos que poderá ajudá-lo no processo de resolução.

2) Conhecer as condicionantes. Nesta etapa o professor deve orientar o aluno a buscar entender que tipo é a incógnita do problema. Se é número (se pode ser positivo, negativo, zero. Se pode ser fracionário, irracional, etc.), se é uma equação, uma matriz, ... Esse conhecimento da incógnita pode levar o estudante a delimitar a área de busca, o campo de estudo e até mesmo os conhecimentos matemáticos possíveis para resolver o problema.

3) E para concluir a resolução do problema o professor pedirá aos alunos que construa uma representação que posso ilustrar a incógnita do problema, podendo ser um desenho, uma tabela, uma frase, uma expressão algébrica ou até mesmo um

pensamento capaz de explicitar os dados do problema; e, qualquer outra representação matemática ou simbólica dos dados que ajude no entendimento e/ou resolução do problema.

- Com os alunos já familiarizados com a Resolução de Problemas, partiremos para um ensino "através" da Resolução de Problemas na qual os alunos com a experiência de resolver problemas e explorando do contexto, elaborando novos algoritmos afim de produzir novos conhecimentos por meio da introdução de novos conceitos.
- E, por fim, faremos um ensino "para" Resolução de Problemas com intuito de fixar os novos conceitos conhecimento do aluno e ajudá-lo usar seu conhecimento matemático para resolver problemas. Vale ressaltar que as duas últimas etapas serão sempre fundamentadas em um ensino sobre resolução de problemas e que muitas vezes essas três abordagens se interagem e o podem ocorrer simultaneamente.

Gostaríamos de salientar que este roteiro é apenas uma sugestão para orientar professores que não possuem experiência com essa metodologia de ensino. Diante disso, sugerimos que o professor procure sempre adequar essa proposta a sua própria realidade, buscando novos problemas e novas maneiras de fazer esse trabalho, e assim atingindo seu objetivo que é a aprendizagem de seus alunos.

Ensino "sobre" Resolução de Problemas

Nesse encontro, o Professor deverá propor o Problema 1, a ser desenvolvido pelos alunos fazendo uso da abordagem de um ensino "sobre", cujo foco, como já foi mencionado anteriormente neste texto, é desenvolver habilidades nos estudantes em resolver problemas. Para que isso se realize o Professor poderá pedir que os alunos formem grupos para resolver as atividades desses encontros.

Problema 1[21]: Um terreno retangular mede 36 m de comprimento por 21 m de largura.

[21]Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 34) *apud* Noguti (2014, p. 226).

Fonte: Disponível em < https://www.urbaville.com.br/5-dicas-para-comprar-um-terreno-em-loteamento-de-forma-segura/>. Acesso: 29 de Abril de 2020.

O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores, plantadas a iguais distâncias umas das outras, e quer manter entre as árvores a maior distância e o maior número de árvores possível, e a distância entre elas deve ser um número inteiro. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual deverá ser a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

Nessa etapa, deve-se deixar os estudantes tentar resolver o problema sem a intervenção do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a resolver o problema. Propomos ao professor que procurar auxiliar o aluno que comece por fazer algumas indagações, com naturalidade, como por exemplo: qual é a incógnita do problema? Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? Segundo Polya (1995) "a finalidade destas indagações é focalizar atenção do aluno na incógnita"., pois como é sabido nossos alunos não tem o costume em trabalhar dessa maneira, porém no decorrer dos encontros eles foram se adaptando a essa proposta de ensino e mostrando bastante entusiasmado.

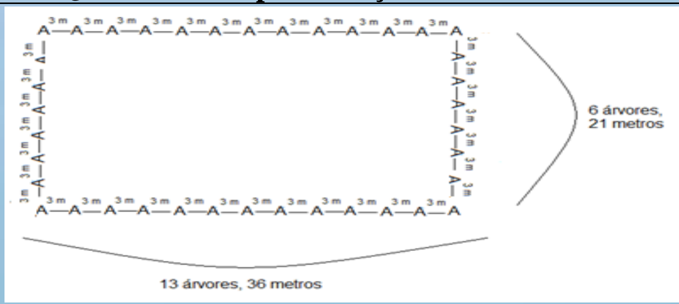
Para ilustrar como se deu a aplicação dessa atividade em sala de aula, apresentamos uma possível resolução do Problema 1 e o diálogo evidenciando uma discussão entre os grupos e o Professor-Pesquisador.

Qual é a incógnita do problema? ou o que é que se deve procura? qual será a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

Quais são os *dados do problema? ou do que é que se precisa?* Um terreno retangular de medidas 36 m de comprimento por 21 m de largura; este terreno deverá ser cercado com árvores, plantadas a iguais distâncias umas das outras; deve-se manter entre as árvores a maior distância possível; o número de árvores plantadas deve ser o maior possível; e, a distância entre as árvores deve ser um número inteiro (em metros).

Qual é a condicionante do problema? e quais os conhecimentos envolvidos na questão? plantio de árvores em um terreno retangular, quantidade de árvores a ser plantadas a uma certa distância e os conhecimentos envolvidos são perímetro e aritmética. E para ilustrar a incógnita do problema podemos desenhar um retângulo e algumas árvores.

Quadro 1 – Representação do Problema 1



Fonte: Cálculo do máximo divisor comum entre 21 e 36, Noguti (2014, p. 226)

Quando questionados sobre os resultados encontrados, os grupos se manifestaram apresentando suas possíveis soluções da quantidade de árvores que poderiam ser plantadas, conforme podemos ver a seguir:

> *G_5: Professor, nós encontramos 38 árvores.*
>
> *P_p: Uhm.... tá bem!!! Como chegaram a esse valor?*
>
> *G_5: A gente somou os lados do retângulo que totalizaram 114 m e depois dividimos por 3.*
>
> *P_p: Sim, mas como vocês chegaram à conclusão do porquê deveriam dividir por 3?*
>
> *G_5: Professor, tentamos vários valores, porém o que dava um número inteiro eram 3 e 6. E como no problema foi dito que deveria se ter a maior quantidade de árvores plantadas, consideramos o 3, totalizando 38 árvores.*
>
> *(Diálogo entre professor e aluno, 2018).*

Quando o Grupo 5, em discussão na sala aula, apresentou sua resolução, a que acabamos de discutir, os estudantes desse grupo afirmaram que para dividir de 114 e obter um número inteiro, deveriam escolher como divisores 3 ou 6 e, a partir disso, concluíram que a maior distância entre as árvores seria 3 metros eles não perceberam que os divisores de 114 não são apenas 3 e 6, de fato os divisores de 114 são (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114). Portanto, a maior distância possível entre as árvores seria o maior divisor comum entre 21 e 36, que é 3. O quadro 1, a seguir, ilustra essa situação.

Portanto, a maior distância entre as árvores será 3 m e o total de árvores será:

= 6 + 6 + 13 + 13 = 38 árvores.

Feita a correção do Problema 1 com a turma, com o intuito de promover condições para que os alunos tenham um pensamento ativo e reflexivo sobre esses problemas e, consequentemente, desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Na terceira etapa deste Produto Educacional que denominamos de um ensino “para” Resolução de Problemas sugerimos uma lista de atividades com alguns Problemas para o professor da trabalhar em sala de aula com objetivo de construir estratégias para resolver problemas.

Ensino “ATRAVÉS” Resolução de Problemas

Iniciando o encontro o professor apresenta uma situação-problema e procura levar os alunos à construção de um novo conhecimento matemático com uma atividade em que se faz necessário o uso de logaritmos no decorrer da resolução. Com isso deverá explicar para os alunos qual conteúdo será necessário para dar continuidade às atividades. Mostrando o histórico do Logaritmo, suas aplicações, qual seu significado, bem como as mudanças que teve, desde quando foi pensado como um facilitador de cálculos e métodos para resolver problemas complexos.

Conceitos de Logaritmos (definição e propriedades)

O Professor poderá desenvolver essa etapa pedindo que os alunos formem duplas e tentem resolver o seguinte problema com as seguintes orientações:

1. Ler o problema individualmente;
2. Ler o problema junto com o seu colega de grupo;
3. Discutir o que é pedido no problema e quais as suas condicionantes;
4. Ao final da resolução um da dupla explicar a resolução do grupo;
5. Resolver o problema.

Problema 2: Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente.

Fonte: Disponível em: <https://www.estudopratico.com.br/america-latina-origem-do-nome-e-economia/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Logo após as duplas terminarem a leitura e resolução do problema, o professor realizou uma leitura do problema em voz alta, com intuito de questiona os estudantes se foi possível a resolução do problema, se não, quais foram as dificuldades encontradas e porque não conseguiram obter sucesso na resolução. Desenvolvemos uma possível forma de estratégia para resolução do problema e assim construir conceitos de logaritmos e aplicar a abordagem "através".

Incógnita do problema ou que é que determinar: em quantos anos a população da América latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Dados dos problemas: a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente;

Condicionante do problema e *Correlações:* trata do crescimento demográfico na América Latina com isso precisa ser um número inteiro positivo.

Representação:

Tempo	População
Início	P (o)
1 ano	P (1) = P (o) + P (o) * (1,012)
2anos	P (2) = [P(o) * (1,012)].(1,012)= Po.$(1,012)^2$
3 anos	P (3) = Po $(1,012)^3$
….	…….
X anos	P (x) = P (o) $(1,012)^x$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Formalização

Supondo que a população dobrará após x anos, tem-se:

P (x) = 2 P(o), daí: P (o) $(1,012)^x$ = 2 P (o) ↔ $(1,012)^x$= 2

Como se pode observar, não é possível resolver esse tipo equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui. Com objetivo de transformar uma equação exponencial como essa em uma igualdade entre potências de mesma base, desenvolver-se-á a noção de **Logaritmo**.

O professor fará um breve relato da história dos logaritmos, e introduzirá a definição de logaritmos, sua condição de existência e as consequências de sua definição e assim resolvendo alguns exemplos com os alunos. E como sugestão de atividades propomos uma lista de atividades para fixação dos novos conhecimentos adquiridos que se encontra na terceira etapa deste Produto Educacional.

Função Logarítmica

Iniciando o encontro com uma situação-problema para construir a ideia de Função Logarítmica, fazendo uso da vertente "através" na Resolução de Problemas, pretende-se que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecendo relações entre essas ideias, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e, assim, desenvolver capacidade de resolver problemas como foi proposto na primeira etapa deste plano de ensino.

Problema 3[22]: Nivaldo está depositando suas economias em caderneta de poupança especial, que rende 2% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre?

Uma possível forma para desenvolver estratégias para resolução do problema:

VI. *Incógnita do problema:* Qual a quantidade de meses para que o valor depositado dobre o seu valor?

VII. *Dados:* depositando suas economias que rendem 2% a.m.

VIII. *Correlações:* Matemática Financeira.

IX. *Conhecimentos específicos:* porcentagem, juros e montante.

X. Representação:

Tempo (Mês)	Rendimento
Início	C
1	C1= c + 2% de c = 1,02c

[22] Problema retirado IEZZI *et al.* (2004) pág. 226.

2	C2 =1,02 + 2% (1,02C) = $(1,02)^2$C
3	C3 = $(1,02)^2$C+ 2% $(1,02)^2$C = $(1,02C)^3$
….	…….
N meses	N=C $(1,02)^n$C

Fonte: elaborado pelo autor (2018)

Possíveis formas para resolução do problema:

Vamos chamar de *c* o valor inicial depositado por Nivaldo. *Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês da aplicação?*

Será c + 2% de c = c + $2/100$ c = c + 0,02 c = 1, 02 c.

Qual será o saldo em conta no final do 2ºmês de aplicação?

Bem, no 2º mês o rendimento de 2% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º, ou seja, sobre 1,02 c.

Assim, teremos o saldo de:

1,02 + 0,02.(1,02c) = 1,02c (1 + 0,02) = $(1,02)^2$ c

Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?

Será $(1,02)^3$c.

Qual será o saldo na poupança no final de n meses de aplicação?

Será $(1,02)^n$ c

Como queremos que a importância dobre, queremos que ela fique igual a 2c no final de n meses, então:

$(1,02)^n$ c = 2c

$(1,02)^n$ = 2 aplicando logaritmos, vem:

$\text{Log}_{1,02} (1,02)^n = \log_{1,02} 2$

$N=\log_{1,02} 2$ (aproximadamente 35 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial triplicasse? Qual seria o número de meses?

$N=\log_{1,02} 3$ (aproximadamente 55 meses)

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por x? Qual seria o número de meses?

N= $N=\log_{1,02} X$

Enfim, para que o capital inicial seja multiplicado por x, é necessário que transcorra um prazo de n(x) meses. O valor n(x) é uma função de x dada pela lei: N(x) = $N=\log_{1,02} x$, que é um caso particular de função logarítmica.

A partir de agora, define-se formalmente a função logarítmica e investigam-se seus gráficos e relações com outras funções.

A lista de atividades para fixação da aprendizagem encontra-se na Parte III desta proposta no ensino “para” Resolução de Problemas.

Ensino "PARA" Resolução de Problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ao ensinar "*para*" resolver problemas, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e propriedades, após isso, coloca vários exemplos tentando abranger a maior quantidade de situações. Assim, deve evindenciar estratégias e usar o conhecimento adquirido pelo aluno anteriormente na resolução das atividades propostas.

Sugestão de Atividades – 01

Para desenvolvimentos de habilidades afim de construir estratégias sugerimos esses problemas para complementar o ensino "sobre" Resolução de Problemas.

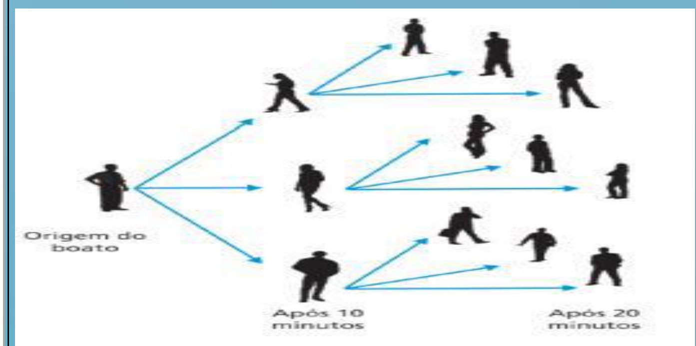
Problema 1

Ian tem menos de 100 cartões de beisebol em sua coleção. Se ele colocar em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocar em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocar em pares, sobra apenas um cartão. Quantos cartões Ian têm?

Fonte: Krulick; Rudnick, (2005, p. 28) apud Noguti, (2014, p. 234).

Problema 2

Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato, não necessariamente verdadeiro, e gasta 10 minutos para contá-lo para seus três melhores amigos. Imagine que cada um dos três amigos resolvesse fazer a mesma coisa, e 10 minutos depois tivessem contado a novidade para três colegas, que ainda não a conhecia.



Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência

10	3	3^1
20	3x3	3^2
30	3x3x3	3^3
40	-	-
50	-	-
60	-	-
70	-	-

Assim, cada um, que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados gastando, para isso, 10 minutos. Diante disso, responda:

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

Fonte: Noguti, (2014, p. 234).

Problema 3

A figura abaixo indica um cubo de aresta a = 10 cm. Uma formiga, localizada em *A*, deseja buscar comida localizada em *B*, caminhando sobre as faces do cubo. Qual é a medida do caminho mais curto que ela pode percorrer de A até B?

FONTE: Iezzi et al (2009, p. 316).

Sugestão de Atividades para fixação dos conceitos de logaritmos – 02

1) O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo **t**, é dado pela função $N(t) = N_o. e^{xt}$, em que N_o é o número inicial de bactérias e x é a taxa de crescimento.

Fonte: Disponível em: < https://www.infoescola.com/microbiologia/cultura-bacteriana/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Se a taxa de crescimento é de 5% ao minuto, em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o dobro da inicial? (Dado: ln2 ≅ 0,6931).

3) O pH de uma solução é definido por $\mathbf{pH = log \frac{1}{[H^+]}}$, sendo $[H^+]$ a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução.

Fonte: Disponível em: < https://canalmetrologia.com.br/existe-ph-negativo-ou-maior-que-14/>. Acesso em 29 de Abril de 2020.

Calcule o **pH** de uma solução que tem $[H^+] = 12.\ 10^{-8}$ íons-grama por litro. (Use log 2 ≅ 0,30 e log 3 ≅ 0,48.)

4) Calcule estes logaritmos, usando a sua definição:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{25} 0{,}008$ c) $\log 10000$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 128$ e) $\log_2 64$

f) $\log_8 \frac{1}{2}$ g) $\log_5 3125$ h) $\log \sqrt[3]{3}\ \sqrt[4]{3}$ i) $\log_8 32$

5) Calcule o valor de x:

a) $\log_x 8 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$

c) $\log_2 x = 5$

Sugestão de Atividades para fixação dos conceitos sobre as propriedades operatórias de logaritmos - 03

1) Dê o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $C = \ln e^2 - 3\ln \sqrt[3]{e} + 2\ln 1$

b) y= $\ln e^3 + \log 0{,}01$.

c) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

d) $\ln\sqrt[3]{e} + e^{\ln 2}$

e) $\log_{(1/4)} 4 + \log_4 ¼$

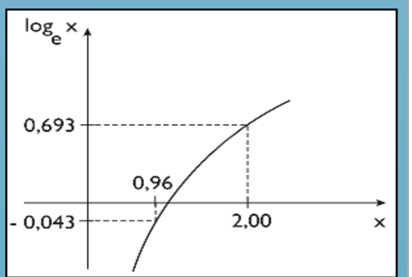
2) Sabendo que log 2=0,301, log 3=0,477, log 5 = 0,699 e log 7 = 0,845, calcule:

a) log 8 b) log 2,5 c) log 15 d) log 81 e) log 42

3) (UFGD) Uma empresa de derivados químicos considera que, quando x milhões de dólares são investidos em pesquisa, o lucro anual, em milhões de dólares, passa a ser $L(x)= 20 + 5 \log_3 (x+3)$, de quanto deveria ser o investimento em pesquisa para que o lucro anual fosse de 40 milhões de dólares?

4) Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.

A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo A = $\mathbf{C.e^{kt}}$, em que: (**C** é a massa inicial; **A** é a massa existente em **t** anos; **k** é uma constante associada ao isótopo radioativo).



Em um laboratório, existem 60 mg de **^{226}Ra**, cujo período de semidesintegração é de 1600 anos.

Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em **mg**, a:

a) 40,2 b) 42,6 c) 50,2 d) 57,6

Sugestão de atividades para fixar os conceitos relacionados a função logarítmica – 04

---

1) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 (4 - x)$

b) $f(x) = \log_{(2 - x)} (x + 1)$

c) $f(x) = \log_x (-2x + 5)$

d) $f(x) = \log_{(2x - 3)} (-x^2 + 2x + 3)$

2) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

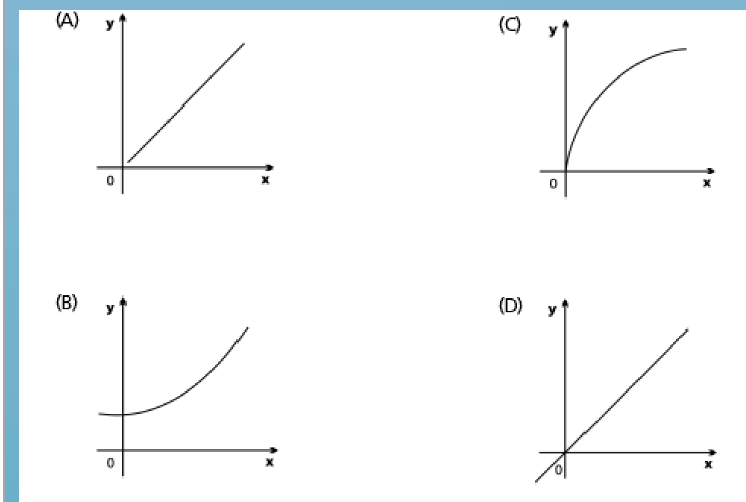
b) $f(x) = \log 1/3\ x$

c) $f(x) = 2 + \log_2 x$

d) $F(x) = \log_2(x - 1)$

3) (UERJ) A relação entre as coordenadas **x** e **y** de um corpo em movimento no plano é dada por $y = 10^{\log x}$.

O gráfico correspondente a esta relação é:



4) (UFJF-MG) Considere a função $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = \log_{10}(x^2 - 6x + 10)$

Marque a opção que expressa o valor de *f(6) – f(- 2)*.

a) 26 b) $\log_{10} 26$ c) 1 d) $\log_{10} \frac{5}{13}$ e) $1 + \log_{10} 26$

Sugestão de atividades envolvendo equações exponenciais e logarítmicas – 05

1) Resolva, em R, as seguintes equações:

a) $3^x = 5$ b) $4^x = 19$ c) $4^{x+1} = 5$ d) $4^{2x-1} = 8^{3x+2}$ e) $4^x + 3 \cdot 4^{x+2} = 5$

2) Resolva as equações.

a) $\log_2 (2x - 5) = \log_2 3$

b) $\log_3 (3 - x) = \log_3 (3x + 7)$

c) $\log_5 (2x - 3) = 2$

3) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre I = 0 até I = 8,9 para maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{E}{E_0}$ na qual **E** é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7.10^{-3}$ kwh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Considerações

Para a construção deste Produto Educacional, focamos principalmente no ensino "através" da Resolução de problemas buscando assim construir conhecimentos relacionados a Logaritmos e Função logarítmica e na observação e orientação na forma que o estudante desenvolvia estratégias para resolução dos problemas apresentados. E, a análise do professor, de forma criteriosa sobre as ações do aluno, seja ela escrita ou falada nos momentos de plenárias, e assim possibilitar o professor a fazer as devidas intervenções.

Nesse sentido, o professor deve estar atento para o que o estudante entendeu sobre cada conceito trabalhado em sala de aula e, evidenciando a Resolução de Problemas nas abordagens do ensino "sobre", "através" e "para". A cada atividade discutida e resolvida, quer em forma de plenária, quer pela solução colocada em cada grupo, buscando ensinar os alunos a desenvolver estratégias de resolução de problemas.

Esperamos que este Produto Educacional possa auxiliar professores a criarem novas propostas eficientes de ensino e assim, trazer contribuições significativa voltada para o ensino-aprendizagem na construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de logaritmos e função logarítmica, fundamentada no ensino de Resolução de Problemas fazendo uso das abordagens "sobre", "para" e "através".

Esse Produto Educacional poderá ser usado por qualquer professor que tenha interesse em Ensinar logaritmos e função logarítmica, ou entender os processos de aprendizagem através da Resolução de Problemas. Além disso, poderá ser usado também por outros pesquisadores interessados em fazer investigações nessa linha de pesquisa voltadas para o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R.; Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014. p. 35 - 52.

BOYER, C. B. **História da Matemática** Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingos. – Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2004. 3ª reimp., 2008.

FERREIRA, N. C.; PEREIRA, J.C.S.; LEMOS, G. C. **Heurística de Resolução de Problemas: aspectos do ensino sobre resolução** – Revista: Conspiração – Professores que Ensinam Matemática- SBEM/MT, 2018.

PECORARI, M. **Logaritmos e Aplicações**- Rio Claro: [s.n.], 2013.

POLYA, G. A. **A arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático; Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimp. -Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA- Boletim de Educação Matemática,** v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F.C.H.; A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática** – Jundiaí, Paco Editorial, 2014. p. 53 - 68.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr.,F.K. Developing Understanding in mathematics via Problem solving, In. TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics Reston: NCTM**, 1989 (Year Book). p. 30 - 42.

ANEXOS

ANEXOS A: TERMO DE COMPROMISSO E RESPONSABILIDADE

Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Goiás

Quantidade de Alunos: 28
Quantidade de Aulas Prevista: 30
Quantidade de Encontros: 15

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização do Projeto de Ensino que será aplicado, em caráter de pesquisa, elencando os direitos e as responsabilidades dos alunos, do professor da disciplina e do Professor-Pesquisador. O trabalho será realizado com alunos do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual José Salviano Azevedo– na cidade de Santa Helena de Goiás– Go.

Normas:

- A pesquisa não deverá interferir no currículo da disciplina, bem como no cumprimento do mesmo;
- O professor da disciplina (Professor-Colaborador) passará o direito e a responsabilidade da aula para o Professor-Pesquisador, durante os 15 encontros definidos e acordados por eles. Os demais encontros serão de responsabilidade do professor da disciplina;
- O Professor-Pesquisador poderá assumir o papel de professor da disciplina, em outros momentos, além dos citados anteriormente, quando for necessário e estiver de comum acordo com o professor da disciplina;
- O Professor-Pesquisador poderá filmar, gravar e fotografar as aulas, quando achar necessário. As mídias serão usadas exclusivamente para coleta, análise e fundamentação dos dados da pesquisa. Nenhuma mídia será divulgada, preservando a identidade e a integridade dos participantes e, ficará de posse do pesquisador por um prazo máximo de cinco anos, logo após serão destruídas, de acordo com o que reza em alguns dos principais códigos de ética e conduta, destinados a este feito;
- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em grupos com o objetivo de resolver problemas visando à construção ou reconstrução de conceitos matemáticos;
- Todos deverão engajar-se na resolução e discussão dos problemas apresentados;
- Cada aluno deverá desenvolver as atividades no final de cada encontro, e serão corrigidas e comentadas no encontro subsequente, ficando uma cópia das mesmas em posse do Professor-Pesquisador;

- As avaliações em caráter de aprovação ou reprovação dos alunos é de responsabilidade do Professor da disciplina (Professor-Colaborador), e não deverá sofrer interferência do Professor-Pesquisador. Porém, o Professor-Pesquisador poderá auxiliar o professor da disciplina, nesse processo, caso seja solicitado;
- Questões omissas deverão ser discutidas por todos e valendo-se da opinião da maioria;

Ciente das normas aqui estabelecidas, e de pleno acordo com elas, firma-se o referido compromisso.

Santa Helena de Goiás, 04 de setembro de 2018.

______________________________	______________________________
Professor-Pesquisador	Professora-Colaboradora

Alunos e alunas

______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

ANEXOS B: CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO DO ALUNO COMO SUJEITO DA PESQUISA

Eu, ____, aluno (a) no 1º ano "C" do Ensino Médio, do Colégio Estadual José Salviano Azevedo (Escola localizada: Rua Jacinto Ferreira de Sousa nº 950, Centro, na cidade de Santa Helena de Goiás/ Brasil), autorizo minha participação como sujeito da pesquisa de mestrado intitulada: "A resolução de problemas como uma estratégia para o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Logaritmo e Função Logarítmica no primeiro ano do Ensino Médio", realizada pelo Professor/pesquisador Júlio César Santos Pereira, matrícula mestrado n. 20172020280141, sob a orientação do Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira. Declaro que fui devidamente informados (as) que a participação nesta pesquisa é inteiramente voluntária, portanto não haverá nenhuma forma de pagamento de ambas as partes. Fui esclarecido (a) que participação na pesquisa se dará de forma anônima, que serão respondidas perguntas à pesquisadora em forma de entrevistas e/ou questionários, realizadas tarefas de estudo e avaliações. Fui informado (a) que as aulas serão monitoradas com filmagens, fotografias, gravação de áudio, e que todo material produto do monitoramento será usado para fins de análise e divulgação dos resultados do desenvolvimento da pesquisa. Foi garantido que posso retirar o consentimento de participação como sujeito da pesquisa a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Fui orientado (a) a entrar em contato com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Jataí, pelo telefone (64) 3632-8650, para esclarecimento de eventuais dúvidas em relação à pesquisa e/ou referente à participação como sujeito da pesquisa. Confirmo que recebi uma cópia deste consentimento de participação como sujeito da pesquisa.

Santa Helena de Goiás – GO, 04 de Setembro de 2018.

____

Assinatura do sujeito

____

Júlio César Santos Pereira

Pesquisador Responsável pela Pesquisa

Presenciamos a solicitação de consentimento de participação na pesquisa, os esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite da participação do sujeito.

____

Testemunha 1

____

Testemunha 2

ANEXOS C: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Eu, ____,inscrito (a) sob o RG ______________________________ CPF_____________________________ autorizo meu filho (a)aluno (a)____ em participar como sujeito da pesquisa de mestrado intitulada: "A resolução de problemas como uma estratégia para o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Logaritmo e Função Logarítmica no primeiro ano do Ensino Médio". A pesquisa tem como objetivo: Como a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para a construção de conhecimentos sobre conceitos de Logaritmos e Função Logarítmica, por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio José Salviano Azevedo (Escola localizada: Rua Jacinto Ferreira de Sousa nº 950, Centro, na cidade de Santa Helena de Goiás/ Brasil). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo professor/pesquisador Júlio César Santos Pereira, matrícula mestrado n. 20172020280141, sob a orientação do Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira. Declaro que fui devidamente informado sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação do meu filho (a), e o uso de imagens e textos produzidos, para fins acadêmicos. Após receber os esclarecimentos e as informações, se você aceitar que seu filho (a) faça parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e outra pertence ao pesquisador responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação seu filho (a) não será penalizado (a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador responsável, via e-mail (juliocesar_mp3@hotmail.com ou profjuliocsantos3@gmail.com) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do(s) seguinte contato telefônico: (64) 992101037. Estou sendo orientado pelo professor Dr. Nilton Cezar Ferreira, em caso de dúvida podem entrar em contato com ele via e-mail (niltoncezar@gmail.com) e no seguinte contato (62) 99166 – 1713. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participantes desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Jataí, pelo telefone (64) 3632-8650, para esclarecimento de eventuais dúvidas em relação à pesquisa e/ou referente à participação como sujeito da pesquisa. Confirmo que recebi uma cópia deste consentimento de participação como sujeito da pesquisa.

Santa Helena de Goiás – GO, 04 de setembro de 2018.

____

Assinatura do Responsável

____

Júlio César Santos Pereira

Pesquisador Responsável pela Pesquisa